

XÁC ĐỊNH HÀM SẢN XUẤT COBB-DOUGLAS BẰNG PHÉP CHIẾU TRỰC GIAO

VÕ MINH VINH

Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một cách xác định hàm sản xuất Cobb - Douglas nhờ vào phép chiếu trực giao trong không gian vectơ các đa thức với một tích vô hướng được xác định. Phương pháp trình bày ở đây tiện lợi về mặt tính toán và cho ta một cách tiếp cận mới đối với bài toán.

Như đã biết, trong bài toán xác định hàm sản xuất, ta thường phải xác định mối liên hệ giữa sản lượng Y phụ thuộc vào lượng vốn K và lượng lao động L theo mô hình Cobb - Douglas.

$$Y = AK^\alpha L^\beta \quad (1)$$

Bài toán đặt ra là với các số liệu thống kê (K_i, L_i, Y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, ta cần tìm hàm sản xuất dạng (1) phản ánh gần đúng nhất các số liệu nêu trên.

Bằng cách lấy log hai vế, (1) trở thành $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$.

$$\text{hay } y = a + \alpha k + \beta l \quad (2)$$

$$\text{với } y = \ln Y \Leftrightarrow Y = e^y$$

$$a = \ln A \Leftrightarrow A = e^a$$

$$k = \ln K \Leftrightarrow K = e^k$$

$$l = \ln L \Leftrightarrow L = e^l$$

Bài toán quy về việc tìm hàm y dạng (3) thỏa tính chất:

$$y_i = a + \alpha k_i + \beta l_i + \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

sao cho $\left(\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 \right)^{1/2}$ đạt giá trị nhỏ nhất,

trong đó:

$$k_i = \ln K_i$$

$$l_i = \ln L_i$$

$$y_i = \ln Y_i$$

Trong các phần sau, chúng tôi sẽ khảo sát lần lượt các trường hợp một trong hai bên biến K hoặc L cố định và trường hợp cả hai biến K và L thay đổi.

1. Trường hợp một biến cố định

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử L cố định. Khi đó, hàm sản xuất Cobb - Douglas có dạng:

$$Y = AK^\alpha \quad (5)$$

Ta cần tìm hàm Y dạng (5) phản ánh gần đúng nhất các số liệu thống kê (K_i, Y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$. Công cụ sử dụng ở

đây là phép chiếu trực giao trong không gian vectơ $\mathcal{H}_n$ các đa thức bậc $\leq n$ (xem [1]).

Với $(k_i = \ln K_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ cố định, với $p, q \in \mathcal{H}_n$ ta sử dụng tích vô hướng sau đây:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^n p(k_i) q(k_i) \quad (6)$$

Với tích vô hướng (6), mỗi đa thức bậc $\leq n$ được đồng nhất với một vectơ $n+1$ chiều $(p(k_0), p(k_1), \dots, p(k_n))$.

Đối với không gian con $\mathcal{H}_1$ của không gian vectơ $\mathcal{H}_n$, ta sử dụng cơ sở trực giao sau đây:

Xét hai đa thức:

$$p_0 = 1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$p_1 = K = (k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Áp dụng quá trình trực giao hóa Gram - Schmidt với (p_0, p_1) .

$$\begin{cases} q_0 = p_0 = 1 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ q_1 = p_1 - \frac{\langle p_1, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 \\ \vdots \\ p_i = K - \frac{\sum_{j=0}^i \langle K, q_j \rangle q_j}{\langle q_i, q_i \rangle} \end{cases} \quad (7)$$

Kết quả chính được nêu trong định lý sau đây:

Định lý 1:

Cho $(n+1)$ điểm dữ kiện (K_i, Y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$. Đặt:

$$k_i = \ln K_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$y_i = \ln Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Khi đó, tồn tại duy nhất một đa thức bậc n $p \in \mathcal{H}_n$

thỏa $p(k_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$

Ngoài ra, hàm $Y = AK^\alpha$ xấp xỉ tốt nhất các điểm dữ kiện trên xác định bởi:

$$Y = e^p \quad (8)$$

Trong đó:

$$\hat{p}(k) = \frac{\langle p, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 + \frac{\langle p, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1$$

$$= \frac{\langle p, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 + \frac{\langle p, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 \quad (9)$$

Chứng minh:

Bước 1:

Xét ma trận Vandermonde sau đây:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & k_0 & k_0^2 & \dots & k_0^n \\ 1 & k_1 & k_1^2 & \dots & k_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_n & k_n^2 & \dots & k_n^n \end{bmatrix}$$

Xét phương trình: $Xc = 0$ với:

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Đặt } p(K) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \dots + c_n k^n$$

Khi đó, phương trình $Xc = 0$ viết lại là:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 k_0 + c_2 k_0^2 + \dots + c_n k_0^n = 0 \\ c_0 + c_1 k_1 + c_2 k_1^2 + \dots + c_n k_1^n = 0 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 k_n + c_2 k_n^2 + \dots + c_n k_n^n = 0 \end{cases}$$

Nghĩa là:

$$p(k_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (10)$$

Ta biết rằng một đa thức $p(k)$ bậc n , không đồng nhất 0, chỉ có thể có tối đa n nghiệm thực.

(10) có nghĩa là $p(k) = 0$ có $n+1$ nghiệm thực $k_i, i = 0, 1, \dots, n$

Do đó:

$$p(k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

tức là $c_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$

Mặt khác, phương trình $Xc = 0$ có thể viết dưới dạng

$$c_0 C_0 + c_1 C_1 + \dots + c_n C_n = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

trong đó $C_i, i = 0, 1, \dots, n$ là các vectơ cột của X

Vậy, các vectơ cột C_i của X độc lập tuyến tính:

Suy ra: X khả đảo

Bây giờ, ta xét hệ phương trình

$$p(k_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Hệ phương trình này viết dưới dạng ma trận là:

$$Xc = y$$

với:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vì X khả đảo nên phương trình $Xc = y$ có nghiệm duy nhất $c \in \mathbb{R}^{n+1}$, nghĩa là tồn tại duy nhất một đa thức p bậc n thỏa $p(k_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$

Bước 2:

Gọi $\hat{p}$ là hình chiếu trực giao của đa thức $p(k) \in \mathcal{H}_{n+1}$ lên không gian con $\mathcal{H}_1$ với cơ sở trực giao $\{q_0, q_1\}$ xác định bởi công thức (7). Ta có (xem [1]):

$$\hat{p} = \frac{\langle p, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 + \frac{\langle p, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1$$

Đặt:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = p(k_0) - q(k_0) \\ \varepsilon_1 = p(k_1) - q(k_1) \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = p(k_n) - q(k_n) \end{cases} \quad q \in \mathcal{H}_1$$

Do tính chất của phép chiếu trực giao, ta có :

$$\varepsilon = \left(\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{đạt min}$$

$$\text{khi } q = \hat{p} = hc_{q_0} p$$

Như thế, hàm $Y = AK^\alpha$ xấp xỉ tốt nhất các điểm dữ kiện (K_i, Y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ là

$$Y = e^p$$

II. Trường hợp K, L thay đổi

Trong phần này, để tiện trình bày, ta xét trường hợp 6 điểm dữ kiện :

$$(K_i, L_i, Y_i), i = 0, 1, \dots, 5$$

Đặt :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & k_0 & l_0 & k_0^2 & l_0^2 & k_0 l_0 \\ 1 & k_1 & l_1 & k_1^2 & l_1^2 & k_1 l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k_5 & l_5 & k_5^2 & l_5^2 & k_5 l_5 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Trong đó :

$$k_i = \ln K_i, l_i = \ln L_i, y_i = \ln Y_i, i = 0, 1, \dots, 5$$

Ta cần tìm hàm sản xuất Cobb-Douglas $Y = AK^\alpha L^\beta$ xấp xỉ tốt nhất 6 điểm dữ kiện nêu trên.

Ta có định lý sau đây :

Định lý 2 :

Giả sử $|X| \neq 0$

Khi đó, tồn tại duy nhất một đa thức hai biến :

$$p(k, l) = a_{00} + a_{10}k + a_{01}l + a_{20}k^2 + a_{02}l^2 + a_{11}kl \text{ thỏa :}$$

$$p(k_i, l_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, 5$$

Ngoài ra, biểu thức sau đây cho ta một tích vô hướng trong không gian vectơ $\mathcal{H}_2$ các đa thức hai biến dạng $p(k, l) = a_{00} + a_{10}k + a_{01}l + a_{20}k^2 + a_{02}l^2 + a_{11}kl$

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^5 p(k_i, l_i) \cdot q(k_i, l_i) \quad ; p, q \in \mathcal{H}_2 \quad (11)$$

Chứng minh :

(i) Xét hệ phương trình :

$$p(k_i, l_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, 5$$

với :

$$p(k, l) = a_{00} + a_{10}k + a_{01}l + a_{20}k^2 + a_{02}l^2 + a_{11}kl \quad (12)$$

Hệ phương trình viết lại dưới dạng ma trận là :

$$Xc = y$$

Trong đó :

$$c = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{02} \\ a_{11} \end{bmatrix}$$

Vì $|X| \neq 0$ nên X khả đảo. Do đó, tồn tại duy nhất vectơ $c \in \mathbb{R}^6$ là nghiệm phương trình, nghĩa là tồn tại duy nhất một đa thức hai biến dạng (12) thỏa $p(k_i, l_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, 5$.

(ii) Dễ thấy (11) là một dạng song tuyến tính, đối xứng, nghĩa là :

$$\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$$

$$\langle \alpha p_1 + p_2, q \rangle = \alpha \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle$$

$$\langle p, \alpha q_1 + q_2 \rangle = \alpha \langle p, q_1 \rangle + \langle p, q_2 \rangle$$

Hơn nữa, ta có :

$$\langle p, q \rangle \geq 0$$

$$\text{và : } \langle p, p \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^5 p^2(k_i, l_i) = 0$$

Do phần (i), hệ phương trình này có nghiệm duy nhất, nên :

$$p \equiv 0$$

Vậy, biểu thức (11) cho ta một tích vô hướng trong $\mathcal{H}_2$.

Định lý 3 :

Giả sử $|X| \neq 0$

Khi đó, hàm sản xuất Cobb - Douglas xấp xỉ tốt nhất 6 điểm dữ kiện (K_i, L_i, Y_i) , $i = 0, 1, \dots, 5$ xác định bởi :

$$Y = e^p \quad (13)$$

$$\text{trong đó : } \hat{p}(k, l) = hc_{q_0} p + hc_{q_1} p +$$

$$hc_{q_2} p \\ = \langle p, q_0 \rangle q_0 + \langle p, q_1 \rangle q_1 + \langle p, q_2 \rangle q_2 \\ \langle q_0, q_0 \rangle \quad \langle q_1, q_1 \rangle \quad \langle q_2, q_2 \rangle \quad (14)$$

$$\text{và : } q_0(k, l) = 1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^6$$

$$q_1(k, l) = k - hc_{q_0} k = k - \frac{\sum_{i=0}^5 k_i}{6} = k - \bar{k},$$

$$\bar{k} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 k_i$$

$$q_2(k, l) = l - hc_{q_0} l - hc_{q_1} l$$

$$= 1 - \frac{\sum_{i=0}^5 l_i}{6} - \frac{\sum_{i=0}^5 l_i (k_i - \bar{k})}{\sum_{i=0}^5 (k_i - \bar{k})^2} (k - \bar{k})$$

Chứng minh :

Do định lý 2, tồn tại duy nhất đa thức :

$$p(k, l) = a_{00} + a_{10}k + a_{01}l + a_{20}k^2 + a_{02}l^2 + a_{11}kl$$

thỏa :

$$p(k_i, l_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, 5$$

$$\text{Đặt : } \varepsilon_i = p(k_i, l_i) - q(k_i, l_i), i = 0, 1, \dots, 5$$

Với : $q(k, l)$ là các đa thức dạng

$$q = a_0 + a_1 k + a_2 l \in \mathcal{H}_1$$

Do tính chất của phép chiếu trực giao, ta có :

$$\varepsilon = \left(\sum_{i=0}^5 \varepsilon_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{đạt min khi :}$$

$$q = \hat{p} = hc_{q_0} p + hc_{q_1} p + hc_{q_2} p$$

Đề ý rằng $\{q_0, q_1, q_2\}$ là 1 cơ sở trực giao của $\mathcal{H}_1$, nên :

$$hc_{q_1} q = hc_{q_0} p + hc_{q_1} p + hc_{q_2} p$$

Như thế, hàm Cobb-Douglas

$Y = AK^\alpha L^\beta$ xấp xỉ tốt nhất các điểm dữ kiện (K_i, L_i, Y_i) , $i = 0, 1, \dots, 5$ là :

$$Y = e^p$$

Chú thích :

(i) Nếu có 10 điểm dữ kiện, $p(k, l)$ sẽ có dạng :

$$p(k, l) = a_{00} + a_{10}k + a_{01}l + a_{20}k^2 + a_{02}l^2 + a_{11}kl + a_{30}k^3 + a_{03}l^3 + a_{21}k^2l + a_{12}kl^2 \in \mathcal{H}_3$$

Tương tự, có 15 điểm dữ kiện thì $p(k, l) \in \mathcal{H}_4$, có 21 điểm dữ kiện thì $p(k, l) \in \mathcal{H}_5$

(ii) Chú ý rằng với tích vô hướng (11), ta không cần xác định p vì p được đồng nhất với vectơ $(p(k_0, l_0), \dots, p(k_5, l_5))$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Võ Minh Vinh, Một cách tìm hàm xu thế nhờ tích vô hướng, Phát triển Kinh tế 4.2003, trang 33-34.
- [2] Greene, W.H, Econometric Analysis, MacMillan, NewYork, 1991.