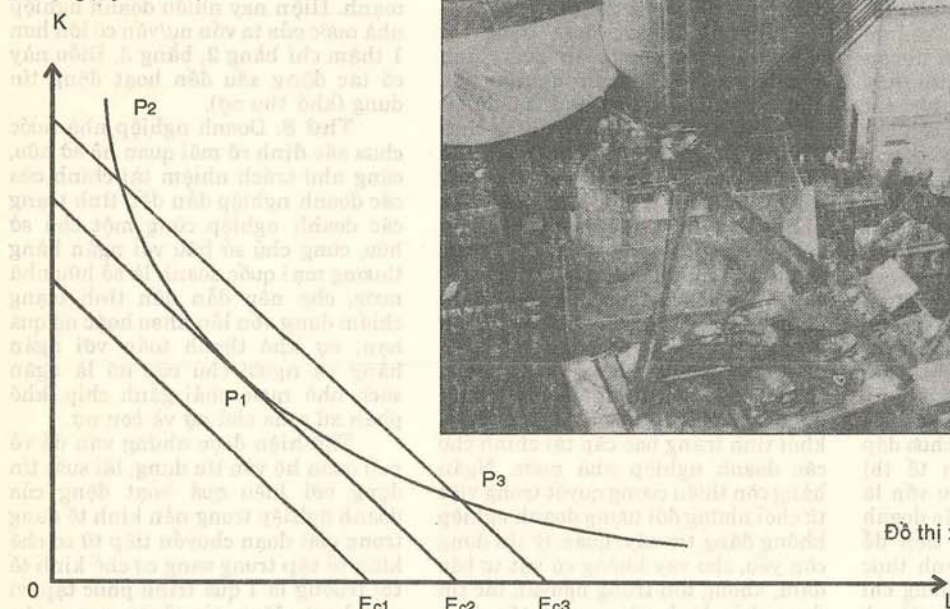


TÌM CHI PHÍ THẤP NHẤT ĐỂ SẢN XUẤT RA MỘT SẢN LƯỢNG q ĐỊNH TRƯỚC

PTS. NGUYỄN VĂN PHÚC



1. Một gợi ý hình học



Đồ thị : Sự tương giao của E_p và E_c

Ta thử đặt một đường đẳng lượng E_p và 3 đường đẳng phí E_{c1} , E_{c2} , E_{c3} trong cùng một hệ trục OLK.

Giả sử Đường cong E_{c1} không cắt E_p

Đường E_{c2} tiếp xúc E_p tại P_1

Đường E_{c3} cắt E_p ở P_2 và P_3 .

Như vậy nếu gọi q là sản lượng tương ứng trên E_p và TC_1 , TC_2 , TC_3 là các tổng chi phí ứng với 3 đường E_{c1} , E_{c2} , E_{c3} thì ta có thể có các gợi ý như sau: (với $TC_1 < TC_2 < TC_3$)

- Chi phí TC_1 không thể sản xuất ra sản lượng q , vì E_{c1} không cắt E_p .

- Chi phí sản xuất ra sản lượng q ở P_2 và P_3 chính là TC_3 . Chi phí này không phải là chi phí thấp nhất.

- Chi phí sản xuất ra sản lượng q ở P_1 là TC_2 . Chi phí này là chi phí thấp nhất. Vì sao vậy? Vì nếu có một chi phí TC' nào đó nhỏ hơn TC_2 thì TC' không thể sản xuất ra sản lượng q vì TC' không cắt E_p . Còn nếu TC' lớn hơn TC_2 thì TC' không phải là chi phí thấp nhất để sản xuất ra sản lượng q , vì TC' cắt E_p ở 2 điểm, ở 2 điểm này sản lượng là q , chi phí là $TC' > TC_2$.

- Như vậy tiếp điểm giữa E_p và E_c cho ta một vị trí phối hợp giữa L và K (điểm L , K) sao cho chi phí sản xuất ra sản lượng q là thấp nhất, ký hiệu TC_{min} .

Xuất phát từ gợi ý trên, ta sẽ dùng phương pháp nhân tử Lagrange để chứng minh sự tồn tại và xác định được tiếp điểm của E_p và E_c , từ đó tìm được chi phí thấp nhất

để sản xuất ra một sản lượng q định trước.

2. Phương pháp nhân tử Lagrange

* Cực trị có điều kiện

Cho $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm số của các biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$

Người ta phải xác định cực đại, cực tiểu của f , khi x_j , $j = \overline{1, n}$ phải thỏa mãn m điều kiện

$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m}$

* Phương pháp nhân tử Lagrange

Hàm Lagrange tương ứng với bài toán trên là:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

$\lambda_i, i = \overline{1, m}$ gọi là các nhân tử Lagrange.

Việc tìm cực trị của f với các điều kiện $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ với $i = \overline{1, m}$ trở thành việc tìm cực trị không điều kiện của hàm Lagrange $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$

Định lý

Để hàm f đạt cực trị tại điểm $P(x_1^0, \dots, x_n^0)$ thì điều kiện cần thiết là

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m}$$

Áp dụng

Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n đầu vào (inputs) [n loại nguyên liệu, bán sản phẩm] được sử dụng để sản xuất ra 1 loại sản phẩm (output) với hàm sản xuất

$$q = q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Mỗi loại nguyên liệu được mua vào tương ứng với giá $k_1, \dots, k_n$. Doanh nghiệp có hàm tổng chi phí là

$$TC = TC(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n k_i x_i$$

Bài toán

Hãy tìm khối lượng nguyên liệu mỗi loại phải sử dụng để sản xuất ra khối lượng sản phẩm đầu ra $q = \bar{q}$ cho trước, sao cho tổng chi phí sản xuất là ít nhất.

* Bài toán trong trường hợp 2 biến

Ta xét bài toán với 2 đầu vào x_1, x_2 .

Lúc đó ta có:

$$\text{Hàm sản xuất là: } q = q(x_1, x_2)$$

$$\text{Hàm tổng chi phí là: } TC = TC(x_1, x_2)$$

$$= k_1 x_1 + k_2 x_2$$

Nếu $\bar{q}$ là sản lượng cho trước thì ta có phương trình đường đẳng lượng là $q = q(x_1, x_2) = \bar{q}$

Cho TC các giá trị khác nhau, thì phương trình các đường đẳng phí là:

$$x_2 = -\frac{k_1}{k_2} x_1 + \frac{TC}{k_2}$$

Để tìm phương án sản xuất, sao cho chi phí sản xuất ít nhất, mà vẫn bảo đảm khối lượng sản phẩm ở đầu ra q , ta phải giải bài toán.

$$TC(x_1, x_2) = k_1 x_1 + k_2 x_2 \rightarrow \min$$

với điều kiện $q(x_1, x_2) = \bar{q}$

Hàm Lagrange tương ứng là

$$L(x_1, x_2) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \lambda [\bar{q} - q(x_1, x_2)]$$

Theo định lý trên, để $P(x_1, x_2)$ là điểm cực tiểu của $TC(x_1, x_2)$ với điều kiện $q(x_1, x_2) = \bar{q}$ thì điều kiện cần sẽ là

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = k_1 - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = k_2 - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{q} - q(x_1, x_2) = 0$$

Từ trên suy ra

$$k_1 = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

$$k_2 = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2}$$

$$q(x_1, x_2) = \bar{q}$$

$$\text{Hay } -\frac{k_1}{k_2} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{\frac{\partial q}{\partial x_2}} \quad (1)$$

Nhưng ta đã có (xin xem phương trình các đường đẳng phí)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_1}{k_2}$$

Do vậy suy ra

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{\frac{\partial q}{\partial x_2}} \quad (2)$$

Đạo hàm hàm ẩn $q(x_1, x_2)$ theo điều kiện $q(x_1, x_2) - \bar{q} = 0$

Ta cũng có

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\text{Hay } \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{\frac{\partial q}{\partial x_2}} \quad (3)$$

Điều kiện (1) cho ta thấy rằng, dọc theo đường đẳng lượng $q(x_1, x_2) = \bar{q}$ doanh nghiệp sẽ hoạt động sản xuất bảo đảm tổng chi phí sản xuất theo giá trị thấp nhất $P(x_1, x_2)$ ở nơi mà độ dốc của đường thẳng

$$x_2 = -\frac{k_1}{k_2} x_1 + \frac{TC_{\min}}{k_2}$$

bằng độ dốc của đường đẳng lượng. Nói một cách khác đường thẳng $k_1 x_1 + k_2 x_2 = TC_{\min}$ phải tiếp xúc với đường đẳng lượng $q(x_1, x_2) = \bar{q}$. Tọa độ của tiếp điểm là phương án sản xuất tối ưu cần tìm.

Kết quả 1: Trong 1 doanh nghiệp có hàm sản xuất là $q = q(x_1, x_2)$ hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = TC(x_1, x_2) = k_1 x_1 + k_2 x_2$ (k_i là giá tương ứng của $x_i, i = 1, 2$).

Doanh nghiệp sẽ sản xuất được sản lượng định trước $\bar{q}$ với chi phí thấp nhất tại điểm tiếp xúc $P(x_1^0, x_2^0)$ của đường đẳng lượng $q(x_1, x_2) = \bar{q}$ và đường đẳng phí bằng nhau $TC = k_1 x_1 + k_2 x_2$

Kết quả tương đương với kết quả 1

Từ (1) ta suy ra

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{k_1} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x_2}}{k_2} \quad (4)$$

Ta biết $\frac{\partial q}{\partial x_i}, i = 1, 2$ là sản phẩm biên tế của q theo

x_i , tức là số sản phẩm sản xuất thêm được, khi tăng thêm một đơn vị đầu vào x_i .

Và: k_i là chi phí mua một đơn vị yếu tố x_i .

Nên ta có thể phát biểu ý nghĩa kinh tế của (4) như sau:

Doanh nghiệp chọn được phương án sản xuất với tổng chi phí thấp nhất, khi mà tỷ lệ giữa sản phẩm biên tế với giá mua một đơn vị yếu tố sản xuất, giữa các yếu tố sản xuất là không thay đổi.

Nghĩa là, nếu yếu tố x_2 đắt hơn x_1 (tức là $k_2 > k_1$) thì doanh nghiệp sẽ chọn phương án sản xuất để $\frac{\partial q}{\partial x_1} < \frac{\partial q}{\partial x_2}$ (yếu tố đắt hơn phải cho sản phẩm biên tế cao hơn) ■

