



Định giá và bảo hộ quyền chọn với chi phí thanh khoản*

NGUYỄN HỮU THÁI **

Trường Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh

THÔNG TIN	TÓM TẮT
Ngày nhận: 30/06/2020 Ngày nhận lại: 25/09/2020 Duyệt đăng: 13/10/2020 Mã phân loại JEL: G11, G13 Từ khóa: Chi phí thanh khoản; Chi phí giao dịch; Chiến lược Leland; Định lý giới hạn trung tâm; Bảo hộ quyền chọn; PDE định giá. Keywords: Liquidity costs; Transaction costs; Leland strategy; Limit theorem; Option hedging; PDE pricing.	Trong bài viết này, tác giả giới thiệu một số phương trình đạo hàm riêng xuất hiện từ bài toán định giá và bảo hộ hợp đồng quyền chọn với chi phí giao dịch và chi phí thanh khoản bằng cách sử dụng độ biến động hiệu chỉnh cho phương trình định giá cổ điển Black-Scholes. Tác giả nghiên cứu đáng điều tiệm cận của sai số bảo hiểm rủi ro trong chiến lược của Leland với sự có mặt của chi phí thanh khoản trong mô hình CJP như đề xuất bởi Çetin và cộng sự (2006). Tác giả chỉ ra rằng đối với một đường cung liên tục, trong khi chi phí thanh khoản trung gian có thể bị bỏ qua ở tiệm cận khi sử dụng chiến lược của Leland thì chi phí thanh khoản tại thời điểm ban đầu đóng một vai trò quan trọng và cần được tính đến trong định giá quyền chọn. Abstract In this note, we revise some pricing PDEs that arise from problems of option pricing and hedging under liquidity costs or transaction costs, using an appropriately adjusted volatility for the classical pricing Black-Scholes PDEs. We discuss the asymptotic behavior of the hedging error of the Leland strategy under liquidity costs under the presence of liquidity costs in the CJP model as proposed by Çetin et al. (2006). The author obtains that for a continuous supply curve, while intermediate liquidity costs for the Leland strategy can be omitted, the initial liquidity cost plays an essential role that should be considered in option pricing. Super-replication can be obtained.

* Bài viết này thuộc chuyên san Toán kinh tế do PGS.TS. Lê Xuân Trường (lxuantruong@ueh.edu.vn) phụ trách.

** Tác giả liên hệ.

Email: thaibopy@ueh.edu.vn (Nguyễn Hữu Thái).

Trích dẫn bài viết: Nguyễn Hữu Thái. (2020). Định giá và bảo hộ quyền chọn với chi phí thanh khoản. *Tạp chí Nghiên cứu Kinh tế và Kinh doanh Châu Á*, 31(4), 64–80.

1. Giới thiệu

Bước đột phá trong lý thuyết định giá quyền chọn (Option Pricing) bắt đầu từ bài báo nổi tiếng của Black và Scholes (1973). Trong công trình này, Black và Scholes đã giới thiệu một mô hình thị trường tài chính đầy đủ với thời gian liên tục không có chi phí giao dịch, trong đó giá cổ phiếu tuân theo một chuyển động Brown hình học. Với giả thuyết không có sự chênh lệch giá (No-Arbitrage), giá của hợp đồng quyền chọn tại thời điểm t bằng với giá trị danh mục đầu tư của một chiến lược tự tài trợ (Self-Financing) cho phép bảo hộ quyền chọn tại thời điểm đáo hạn.

Tuy nhiên, khi các giao dịch có tính phí thì lập luận này không còn hiệu lực và việc bảo hộ hợp đồng quyền chọn khó được đảm bảo một cách hoàn hảo. Trước hết, chúng ta dễ thấy rằng giả thuyết điều chỉnh danh mục đầu tư một cách liên tục là bất khả thi trong thực tế. Nếu chi phí giao dịch khác 0 thì việc thực hiện giao dịch một cách thường xuyên trong thực tế sẽ rất tốn kém bất kể tỷ lệ chi phí giao dịch nhỏ như thế nào bởi vì chiến lược bảo hộ Delta cổ điển có biến phân vô hạn. Quan sát đơn giản này mâu thuẫn với lập luận bởi Black và Scholes khi cho rằng nếu giao dịch diễn ra thường xuyên một cách hợp lý thì sai số bảo hộ của chiến lược bảo hộ Delta sẽ tương đối nhỏ. Do đó, mô hình định giá quyền chọn Black-Scholes và bài toán bảo hộ với chi phí giao dịch cần phải điều chỉnh. Trong bối cảnh như vậy, các nghiên cứu gần đây cho thấy việc tăng tham số độ biến động (Volatility) có thể áp dụng để bù đắp chi phí giao dịch. Cụ thể, Leland (1985) đã phân tích rằng chiến lược bảo hộ Delta thu được từ một phương trình đạo hàm riêng định giá Black-Scholes với độ biến động được điều chỉnh thích hợp đem lại sự bảo hộ đầy đủ một cách xấp xỉ.

Nhiều nghiên cứu đã được đề xuất nhằm làm yếu các giả thuyết phi thực tế trong lý thuyết Black-Scholes cho bài toán định giá và bảo hộ hợp đồng quyền chọn. Việc loại bỏ hai giả thuyết thị trường cạnh tranh và giao dịch tự do không chỉ phí dẫn đến khái niệm rủi ro thanh khoản. Một cách cơ bản, rủi ro thanh khoản được định nghĩa như là rủi ro xuất phát từ thời gian thực hiện và quy mô của giao dịch. Hai cách tiếp cận khác nhau có thể được tìm thấy trong các tài liệu liên quan rủi ro thanh khoản. Cách tiếp cận đầu tiên tập trung vào ảnh hưởng của nhà giao dịch lớn (Large Traders) với các giao dịch có ảnh hưởng (Market Impact) đến giá trị của cổ phiếu trên thị trường. Trong khi đó, cách thứ hai tuy bỏ qua các tác động phản hồi trung gian nhưng tập trung vào việc thiết lập cân bằng cung và cầu theo thời gian sao cho khối lượng giao dịch không ảnh hưởng đến giá trị tài sản. Khi đó, chi phí thanh khoản phát sinh theo thời gian chủ yếu do sự thay đổi danh mục đầu tư. Nghĩa là chi phí giao dịch có thể được coi là một trường hợp cụ thể của chi phí thanh khoản (Cetin và cộng sự, 2004).

Trong bài viết này, tác giả giới thiệu một số phương trình đạo hàm riêng xuất hiện từ bài toán định giá và bảo hộ hợp đồng quyền chọn dựa trên chi phí giao dịch và chi phí thanh khoản bằng cách sử dụng độ biến động hiệu chỉnh cho phương trình định giá cổ điển Black-Scholes. Tác giả nghiên cứu đáng chú ý tiệm cận của sai số bảo hiểm rủi ro trong chiến lược của Leland với sự có mặt của chi phí thanh khoản. Tác giả chỉ ra rằng đối với một đường cung liên tục, trong khi chi phí thanh khoản trung gian có thể bị bỏ qua ở tiệm cận khi sử dụng chiến lược của Leland, thì chi phí thanh khoản tại thời điểm ban đầu đóng một vai trò quan trọng và cần được tính đến trong định giá quyền chọn.

Phần còn lại của bài viết được tổ chức như sau: Phần 2 – Giới thiệu tóm tắt mô hình định giá Black-Scholes cổ điển. Phần 3 – Trình bày mô hình chi phí thanh khoản CJP cùng với một số phương

trình đạo hàm riêng (Partial Differentiable Equations – PDE) định giá với độ biến động hiệu chỉnh theo chi phí thanh khoản. Phần 4 – Bàn về phương pháp hiệu chỉnh độ biến động Leland trong định giá và bảo hộ quyền chọn với chi phí giao dịch. Cuối cùng, phần 5 – Trình bày bài toán bảo hộ xấp xỉ với chi phí thanh khoản sử dụng chiến lược Leland.

2. Mô hình định giá Black-Scholes cổ điển

Trong mục này, tác giả tóm tắt mô hình định giá quyền chọn Black-Scholes (BS). Xét một thị trường tài chính gồm một tài sản phi rủi ro (trái phiếu) và một tài sản rủi ro (cổ phiếu) với giá được mô phỏng bởi chuyển động Brown trên một không gian xác suất lọc $(\Omega, \mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, P)$. Để đơn giản, chúng ta giả sử lãi suất luôn bằng 0, nghĩa là trái phiếu được xem như một tài sản tiêu chuẩn (Numéraire). Giá cổ phiếu tại thời điểm t được cho bởi:

$$dS_t = \sigma S_t dW_t$$

Nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên $S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}$ là một chiến thuật Martingale theo độ đo P . Chú ý rằng trong trường hợp lãi suất khác 0, định lý biến đổi Girsanov có thể được áp dụng để loại bỏ hệ số xu hướng (Drift).

- **Định nghĩa 1:** Một chiến lược $(\beta_t, \gamma_t)_{0 \leq t \leq 1}$ được gọi là chấp nhận được nếu nó tự tài trợ và khả tích

$$\int_0^t (|\beta_t| + \gamma_t^2) dt < \infty \text{ hầu chắc chắn}$$

và giá trị danh mục đầu tư $V_t = V_0 + \int_0^t \gamma_u dS_u$, $t \in [0, 1]$ bị chặn dưới.

Theo nguyên lý không có cơ hội kinh doanh chênh lệch giá thì giá tại thời điểm t của một hợp đồng quyền chọn kiểu châu Âu với hàm giá trị chi trả đáo hạn (Payoff) h được tính bởi:

$$C(t, S_t) = E[h(S_t) | \mathcal{F}_t]$$

Cụ thể, đối với quyền chọn mua $h(x) = \max(x - K, 0)$, ta có:

$$C(t, x) = C(t, x, \sigma) = x\Phi(\tilde{v}(t, x)) - K\Phi(\tilde{v}(t, x) - \sigma\sqrt{1-t})$$

Trong đó,

$$\tilde{v}(t, x) = v(\sigma^2(1-t), x); \text{ và}$$

$$v(\lambda, x) = \frac{\ln(x/K)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$$

Trong đó,

K : Giá mua cố định trước (Strike Price);

Φ và φ : Lần lượt là hàm phân phối và hàm mật độ của phân phối chuẩn.

Chúng ta biết rằng $C(t, x)$ là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng BS (BS-PDE):

$$\hat{C}_t(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \hat{C}_{xx}(t, x) = 0, \text{ với } 0 \leq t < 1$$

$$\text{và } \hat{C}(1, x) = h(x)$$

Bài toán bảo hộ quyền chọn cổ điển là đi tìm một chiến lược tự tài trợ chấp nhận được sao cho giá trị danh mục đầu tư lớn hơn hoặc bằng giá trị quyền chọn tại thời điểm đáo hạn:

$$V_1 = V_0 + \int_0^1 \gamma_u dS_u \geq h(S_1)$$

một cách hầu chắc chắn.

3. Hiệu chỉnh Leland trong định giá và bảo hộ quyền chọn với chi phí giao dịch

Hiệu chỉnh Leland dựa trên ý tưởng rằng sự có mặt của chi phí giao dịch dẫn đến một khoản phí bổ sung cần thiết cho người bán quyền chọn nhằm bù trừ cho chi phí giao dịch trong các hoạt động bảo hộ hợp đồng quyền chọn. Điều này có nghĩa là với sự hiện diện của chi phí giao dịch, hợp đồng quyền chọn được định giá cao hơn. Một cách trực quan, điều này tương đương với sự gia tăng của tham số độ biến động trong chiến lược Black-Scholes. Leland (1985) đã đề xuất một phiên bản sửa đổi của phương trình Black-Scholes với độ biến động hiệu chỉnh và nghiên cứu đáng chú ý của sai số bảo hộ được tính bởi độ chênh lệch giữa giá trị danh mục đầu tư và giá trị quyền chọn tại thời điểm đáo hạn khi số lượng giao dịch tiến đến vô cùng.

Giả sử nhà đầu tư phải trả cho mỗi giao dịch thành công một chi phí tỷ lệ thuận với khối lượng giao dịch được đo bởi đơn vị tiền tệ (ví dụ: đồng USD). Hệ số chi phí được xác định bởi $\kappa_n = \kappa_0 n^{-\alpha}$ phụ thuộc vào số lần giao dịch n . Chú ý rằng, mặc dù $\kappa_n = \kappa_0 n^{-\alpha}$ rất nhỏ, một chiến lược bảo hộ không được tính toán cẩn thận có thể dẫn đến chi phí giao dịch toàn phần rất lớn. Theo Leland (1985), người bán quyền chọn (Option Seller) nên tăng độ biến động lên để bù lại chi phí giao dịch.

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \varrho n^{1/2} \quad \text{với } \varrho = \kappa_0 n^{-\alpha} \sigma \sqrt{8/\pi} \quad (1)$$

Tham số $\hat{\sigma}^2$ được đưa vào trong phương trình BS lúc này nhằm thu được giá quyền chọn bao gồm: Chi phí giao dịch $\hat{C}(t, x) = C(t, x, \hat{\sigma})$, trong đó, $\hat{C}(t, x)$ là nghiệm của phương trình:

$$\hat{C}_t(t, x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 x^2 \hat{C}_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{với } 0 \leq t < 1; \text{ và } \hat{C}(1, x) = h(x) \quad (2)$$

Để bảo hộ hợp đồng quyền chọn, người bán nên theo chiến lược bảo hộ Delta rời rạc tương ứng (với độ biến động được điều chỉnh $\hat{\sigma}^2$), được gọi là chiến lược Leland với định nghĩa như sau:

$$\gamma_t^n = \sum_{i=1}^n \hat{C}_x(t_{i-1}, S_{t_{i-1}}) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \quad (3)$$

Nghĩa là số chứng khoán được giữ trong khoảng thời gian $(t_{i-1}, t_i]$ là không đổi và bằng với chiến lược Delta tính ở biên trái của khoảng này. Như vậy, tại thời điểm đáo hạn, giá trị của danh mục đầu tư có dạng sau:

$$V_1^n = V_0^n + \int_0^1 \gamma_u^n dS_u - \kappa_0 n^{-\alpha} J_n \quad (4)$$

Trong đó, tổng chi phí giao dịch được viết như sau:

$$J_n = \sum_{i=1}^n S_{t_i} |\gamma_{t_i}^n - \gamma_{t_{i-1}}^n| \quad (5)$$

Giá trị ban đầu của danh mục đầu tư Leland ở đây được cho bởi $V_0^n := \hat{C}(0, S_0)$, chúng ta có thể hiểu nó như là giá hợp đồng quyền chọn bao gồm chi phí giao dịch. Sử dụng công thức Itô và công thức (2), tác giả biểu diễn sai số bảo hộ như sau:

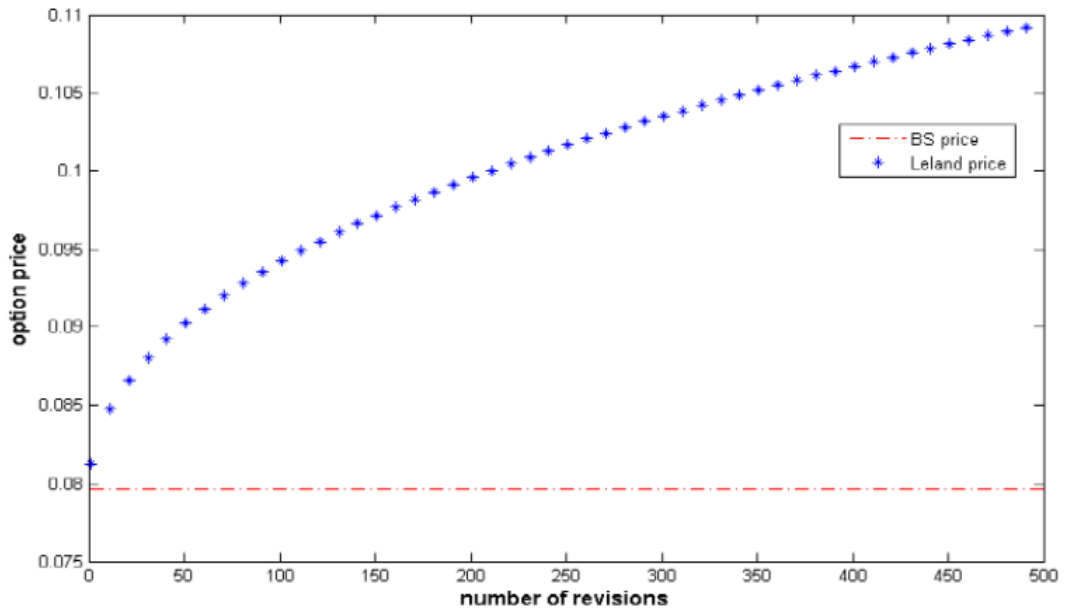
$$V_1^n - h(S_1) = \int_0^1 (\gamma_t^n - \hat{C}_x(t, S_t)) dS_t + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}^2 - \sigma_0^2) \int_0^1 S_t^2 \hat{C}_{xx}(t, S_t) dt - \kappa_0 n^{-\alpha} J_n \quad (6)$$

- **Chú ý 1:** Công thức độ biến động hiệu chỉnh (1) thu được từ quan sát sau: Tổng Riemann của các số hạng $\sigma S_{t_{i-1}}^2 \hat{C}_{xx}(t_{i-1}, S_{t_{i-1}}) \Delta t$ rõ ràng là một xấp xỉ của tích phân Lebesgue (6), trong khi đó:

$$S_{t_i} |\gamma_{t_i}^n - \gamma_{t_{i-1}}^n| \approx \sigma S_{t_{i-1}}^2 |\hat{C}_{xx}(t_{i-1}, S_{t_{i-1}})| |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \approx \sigma \sqrt{2/\pi} S_{t_{i-1}}^2 \hat{C}_{xx}(t_{i-1}, S_{t_{i-1}}) \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

$$\text{vì } E|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Do vậy, chúng ta kỳ vọng rằng việc chọn độ biến động được điều chỉnh như trong công thức (1) mang lại một sự gia tăng phù hợp trong giá trị danh mục đầu tư để bù lại cho chi phí giao dịch.



Hình 1. Giá hợp đồng quyền chọn trong trường hợp có và không có chi phí giao dịch

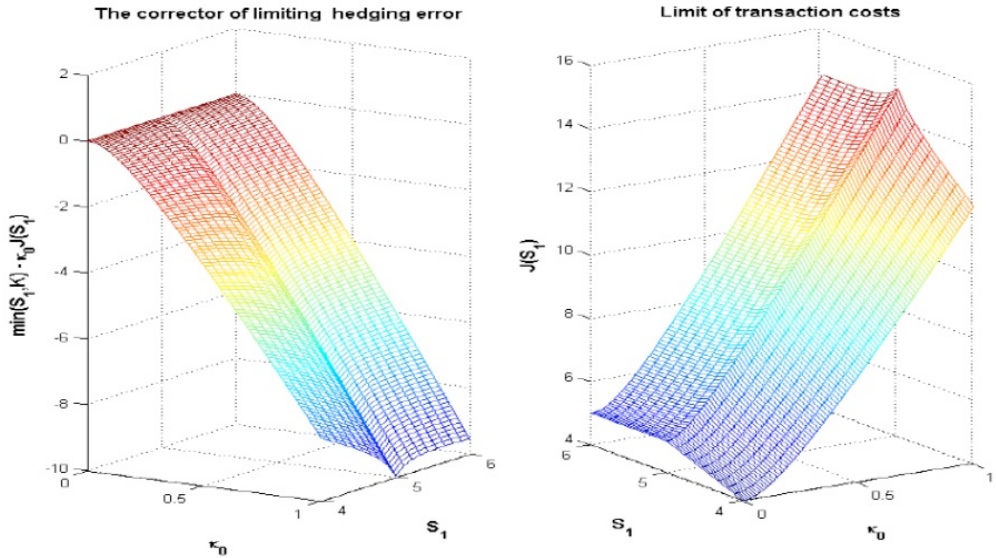
- **Định lý 1.** (Dựa theo Kabanov và Safarian (1997, 2009)).

(1) Với mọi giá trị $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ trong công thức (1), dãy V_1^n hội tụ theo xác suất đến giá trị hợp đồng quyền chọn đáo hạn khi $n \rightarrow \infty$.

(2) Với $\alpha = 0$, dãy các biến ngẫu nhiên $V_1^n - h(S_1)$ hội tụ theo xác suất đến $\min(S_1, K) - \kappa_0 J(S_1)$ khi $n \rightarrow \infty$, trong đó:

$$J(x) = x \int_0^{+\infty} \lambda^{-1/2} \tilde{\varphi}(\lambda, x) E \left| \sigma \varrho^{-1} Z + \frac{\ln(x/K)}{2\lambda} - \frac{1}{4} \right| d\lambda \quad (8)$$

Trong đó, Z là một biến chuẩn tắc độc lập với S_1 .



Hình 2. Đồ thị của $\min(S_1, K) - \kappa_0 J(S_1)$ và $J(S_1)$ với $K = 5$ từ trái sang phải

4. Mô hình chi phí thanh khoản CJP

Trong phần này, chúng ta sẽ xét khái niệm và một số tính chất cơ bản của mô hình chi phí thanh khoản được đề xuất trong Çetin và cộng sự (2004). Nhắc lại rằng, trong mô hình đó thì chi phí giao dịch có thể được coi là một trường hợp cụ thể của chi phí thanh khoản.

4.1. Đường cung và chi phí thanh khoản

Từ quan điểm của lý thuyết cân bằng giữa cung và cầu, chúng ta có thể giả thuyết rằng tất cả các nhà đầu tư định giá cổ phiếu theo một đường cung phụ thuộc vào độ lớn của giao dịch mua hoặc bán trong khoảng thời gian giao dịch $[0, 1]$. Nói cách khác, giá trị cổ phiếu nhà đầu tư phải trả khi thực hiện giao dịch tuân theo một đường cung phụ thuộc vào quy mô giao dịch của mình. Như vậy, đường cung $S(t, z)$ được định nghĩa là hàm không âm của giá cổ phiếu tham chiếu (khi không có giao dịch), thời gian giao dịch t và quy mô giao dịch z .

• **Định nghĩa 2:** Một hàm $S(t, z) : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ được gọi là một đường cung theo nghĩa của CJP nếu nó là hàm không âm, $\mathcal{F}_t$ - đo được, không giảm, thuộc lớp các hàm trơn C^2 theo z và hàm giá cận biên (Marginal Price) $S(t, 0)$ là một Semimartingale liên tục.

- **Ví dụ 1:** Cho $S(t, z) = e^{\alpha z} S(t, 0)$, $S_t := S(t, 0) = S_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}$, trong đó: $\alpha > 0$ là một hằng số cho trước; và W là một chuyển động Brown chuẩn. Đây là một mô hình Black-Scholes mở rộng với rủi ro thanh khoản và giá cổ phiếu cận biên (Marginal Price) S_t là một chuyển động Brown hình học.

Sau đây, tác giả xét điều kiện tự tài trợ (Self-Financing) trong mô hình CJP. Giả sử bây giờ chỉ có hai tài sản trong nền kinh tế, một có rủi ro (chứng khoán) và một phi rủi ro (trái phiếu) là một hằng số tại mọi thời điểm. Đối với chiến lược bất kỳ γ_t , số lượng cổ phiếu nắm giữ tại thời điểm t , giá trị trái phiếu tại thời điểm t được ký hiệu là Y_t . Cần nhắc lại rằng điều kiện tự tài trợ đạt được khi $V_t = Y_t + \gamma_t S_t = V_0 + \int_0^t \gamma_t dS_t$. Ở đây giá trị danh mục đầu tư ban đầu tại thời điểm 0 được cho bởi $V_0 = Y_0 + \gamma_0 S_0$.

Trong mô hình CJP, chiến lược γ_t được gọi là tự tài trợ nếu nó là một quá trình liên tục phải và có giới hạn trái (càdlàg) với biến phân bậc hai hữu hạn và giá trị danh mục đầu tư $V_t = +\gamma_t S(t, 0)$ thỏa quan hệ sau:

$$V_t = V_0 + \int_0^t \gamma_u dS(u, 0) - \sum_{0 \leq u \leq t} \Delta \gamma_u [S(u, \Delta \gamma_u) - S(u, 0)] - \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(u, 0) d[\gamma, \gamma]_u^c \quad (9)$$

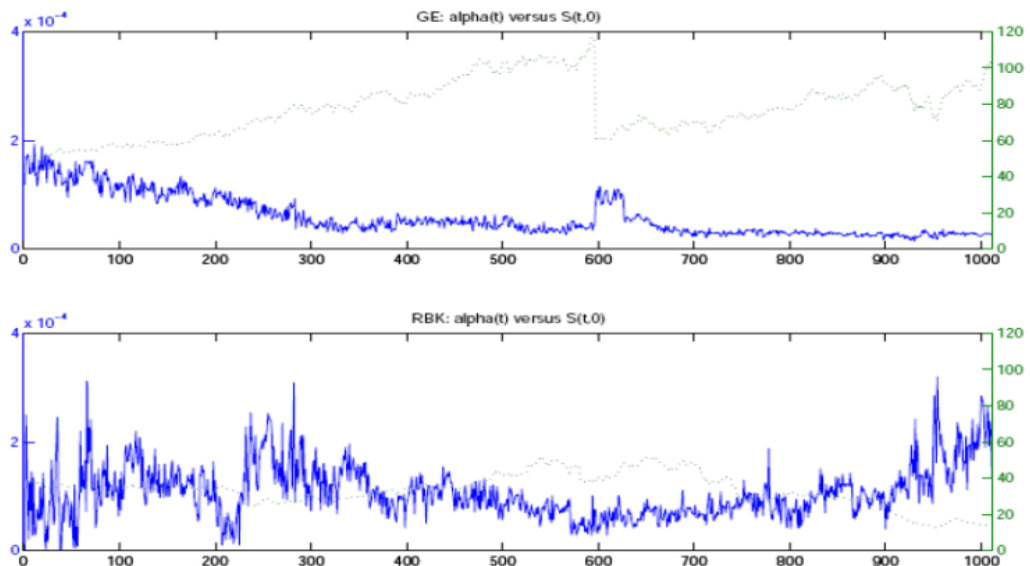
Trong đó, $V_0 = Y_0 + \gamma_0 S(0, \gamma_0)$. Rõ ràng rằng vế phải của công thức (9) là chênh lệch của quá trình lãi/lỗ (Profit/Loss) tích lũy và tổng chi phí thanh khoản đến thời điểm t .

- **Định nghĩa 3:** Quá trình L_t được định nghĩa bằng công thức:

$$L_t = \sum_{0 \leq u \leq t} \Delta \gamma_u [S(u, \Delta \gamma_u) - S(u, 0)] + \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(u, 0) d[\gamma, \gamma]_u^c \quad (10)$$

với $L_0 = \gamma_0 [S(0, \gamma_0) - S(0, 0)]$ được gọi là chi phí thanh khoản của chiến lược γ_t .

Rõ ràng là chi phí thanh khoản L_t là không âm và không giảm theo thời gian t . Hơn nữa, tổng rời rạc trong công thức (10) thể hiện chi phí do những thay đổi không liên tục trong việc nắm giữ cổ phần trong danh mục đầu tư. Số hạng tích phân trong vế phải của công thức (10) là một quá trình liên tục, nhận giá trị 0 nếu γ là chiến lược có biến phân hữu hạn.



Hình 3. Đồ thị các tham số ước lượng hằng ngày của giai đoạn từ ngày 03/01/1995 đến ngày 31/12/1998 cho GE và Reebok (RBK).

Ghi chú: Đường chấm chấm biểu thị giá cổ phiếu trung bình hằng ngày của công ty.

Nguồn: Hình ảnh được lấy từ bài báo của Çetin và cộng sự (2006).

- **Chú ý 2:** Nếu γ_t là một chiến lược liên tục với biến phân hữu hạn và $\gamma_0 = 0$ thì $L_t = L_0 = 0$, nghĩa là mọi chi phí thanh khoản bị loại bỏ.

Từ lý thuyết định giá Martingale, giả thuyết không có cơ hội kinh doanh chênh lệch giá (No Arbitrage hoặc NFLVR) tương đương với sự tồn tại của một độ đo Martingale địa phương $\mathbb{Q}$ cho quá trình giá cận biên S_t . Çetin và cộng sự (2010a) chứng minh rằng trong tình huống đó, mọi quyền chọn với giá trị đáo hạn khả tích C là bảo hộ được theo nghĩa L^2 , đồng thời tất cả các chi phí thanh khoản có thể tránh được bằng cách sử dụng chiến lược bảo hộ liên tục với biến phân hữu hạn.

- **Định lý 2:** Với bất kì chiến lược khả đoán γ_t với $E^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \gamma_t^2 d[S, S]_t\right) < \infty$ sao cho $C = c + \int_0^T \gamma_t^2 dS_t$ với hằng số $c \in \mathbb{R}$, tồn tại một dãy các chiến lược tự tài trợ $(\gamma_t^n)_n$ liên tục, bị chặn với biến phân hữu hạn và $\gamma_0^n = \gamma_T^n = 0$, sao cho $E^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T (\gamma_t^n)^2 d[S, S]_t\right) < \infty$ và

$$Y_T^n = E^{\mathbb{Q}}(C) + \gamma_0^n S(0, \gamma_0^n) + \int_0^T \gamma_t^n dS(t, 0) - \gamma_T^n S(T, 0) - L_T^n \rightarrow C \text{ trong } L^2(d\mathbb{Q})$$

- **Ví dụ 2:** Xét lại mô hình Black-Scholes mở rộng trong Ví dụ 1. Nhận xét rằng chiến lược bảo hộ Delta tiêu chuẩn được xác định bởi $\Phi(v(t, S_t))$ với

$$v(t, x) = \frac{\ln(x/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$

là liên tục, nhưng không có biến phân hữu hạn. Chiến lược này dẫn đến một chi phí thanh khoản khác 0 theo Định nghĩa 3 và được biểu diễn bằng công thức sau:

$$L_T = \gamma_0(S(0, \gamma_0) - S(0, 0)) + \alpha \int_0^T S_t \frac{\varphi^2(v(t, S_t))}{T-t} \left(\frac{\ln(x/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{4} \right)^2 dt \quad (11)$$

Chú ý rằng chúng ta có thể xây dựng một dãy chiến lược liên tục với biến phân hữu hạn bắt đầu với 0, hội tụ nhanh đến chiến lược Delta Black-Scholes liên tục. Bản sao liên tục này của chiến lược Delta BS sẽ loại bỏ rủi ro thanh khoản, và như vậy, dãy giá trị danh mục đầu tư hội tụ đến giá trị của hợp đồng quyền chọn trong không gian L^2 (Çetin và cộng sự, 2010a). Tuy nhiên, một chiến lược phòng ngừa rủi ro liên tục như vậy không thể thực hiện được vì trong thực tế chúng ta không thể giao dịch liên tục với số lượng nhỏ bất kỳ.

Chi phí giao dịch có thể được xem là trường hợp đặc biệt của chi phí thanh khoản khi giả thuyết C^2 của đường cung không thỏa mãn. Thật vậy, ba loại chi phí giao dịch sau đây có thể thu được từ mô hình CJP:

- (1) Chi phí giao dịch cố định có thể thu được nếu đường cung có dạng:

$$S(t, z) = S(t, 0) + \frac{a}{z} \text{ với } a > 0$$

- (2) Chi phí giao dịch tỷ lệ có thể thu được trực tiếp từ:

$$S(t, z) = S(t, 0)(1 + \kappa_0 \text{sign}(z))$$

Trong đó, $\kappa_0 > 0$ là chi phí giao dịch tỷ lệ trên mỗi đơn vị giao dịch.

(3) Hỗn hợp chi phí giao dịch cố định và tỷ lệ có thể được định nghĩa bởi:

$$S(t, z) = S(t, 0) + \frac{a}{z} + S(t, 0)\kappa_0 \operatorname{sign}(z)1_{|z|>\delta},$$

với các hằng số dương gồm: a, κ_0, δ

Như đã thấy ở trên, chi phí thanh khoản có thể tránh được bằng cách sử dụng các chiến lược giao dịch liên tục với biến phân hữu hạn, nhưng một chiến lược với biến phân hữu hạn có thể dẫn đến chi phí thanh khoản không bị chặn.

• **Định lý 3:** Đối với bất kì chiến lược với biến phân vô hạn trên một khoảng thời gian hữu hạn, giao dịch liên tục với sự có mặt của chi phí cố định, chi phí tỷ lệ hoặc cả hai sẽ dẫn đến tổng chi phí vô hạn.

Chứng minh: Tham khảo bài báo của Çetin và cộng sự (2010a) để biết thêm chi tiết.

4.2. PDE định giá với độ biến động hiệu chỉnh theo chi phí thanh khoản

Trong phần này, tác giả sẽ giới thiệu một số PDE định giá xuất hiện từ việc áp dụng kỹ thuật điều chỉnh độ biến động cho bài toán định giá và bảo hộ quyền chọn trong nhiều tình huống khác nhau. Từ quan điểm cân bằng cung cầu, Sirca và cộng sự (1998) xây dựng một động lực của quá trình giá phụ thuộc vào hoạt động giao dịch của nhà giao dịch lớn và rút ra được một phương trình đạo hàm riêng Black-Scholes tổng quát sau đây:

$$C_t + \frac{1}{2} \left[\frac{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x))}{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x)) - \rho x C_{xx}} \right]^2 \sigma^2 x^2 C_{xx} = 0 \quad (12)$$

Với điều kiện biên $\hat{C}(1, x) = h(x)$, trong đó: U là hàm cầu; V là hàm ngược của U ; và ρ là tỷ lệ khối lượng quyền chọn được bảo hiểm trên tổng nguồn cung của tài sản.

Çetin và cộng sự (2010b) đã nghiên cứu bài toán siêu bảo hộ (Super-Replication) trong nền kinh tế Black-Scholes được tổng quát hóa với sự có mặt của chi phí thanh khoản dưới các ràng buộc trên hệ số Gamma của chiến lược phòng ngừa rủi ro. Giá của quyền chọn với siêu bảo hộ được đặc trưng thông qua Hamilton-Jacobi-Bellman PDE sau:

$$-C_t - \inf_{v \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 (C_{xx} + v) + \phi(t, x) \sigma^2 x^2 (C_{xx} + v)^2 \right\} = 0 \quad (13)$$

Trong đó, giá cận biên tuân theo một chuyển động Brown hình học và ϕ là tham số thanh khoản của thị trường. Đối với một quyền chọn có hàm chi trả lồi (Convex Payoff), công thức (13) được viết lại thành:

$$C_t + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, x) x^2 C_{xx} = 0, \quad \tilde{\sigma}^2(t, x) = \sigma^2 (1 + \phi(t, x)) C_{xx} \quad (14)$$

Quan sát công thức (14), chúng ta một lần nữa thấy rằng ý tưởng tăng độ biến động thị trường để hấp thụ rủi ro thanh khoản. Khi $\phi = 0$, chúng ta thu được mô hình Black-Scholes cổ điển. Ta có thể

chứng minh rằng giá siêu bảo hộ cực tiểu là khác S_0 , nghĩa là tồn tại một chi phí thanh khoản (Liquidity Premium). Điều này phù hợp với kết quả dưới đây¹.

Nhắc lại rằng, với một chiến lược rời rạc γ_t^n , từ công thức (10), tổng chi phí thanh khoản được biểu diễn ở dạng như sau:

$$L_1^n = L_0 + \sum_{i=1}^n \Delta \gamma_i (S(t_i, \Delta \gamma_i) - S(t_i, 0))$$

Thay $S(t_i, \Delta \gamma_i) - S(t_i, 0) \approx \psi'(0)S(t_i, 0)\Delta \gamma_i$, chúng ta nhận thấy L_1^n có thể xấp xỉ bởi $L_0 + \psi'(0)\sigma^2 \sum_{i=1}^n S_{t_{i-1}}^3 C_{xx}^2(t_{i-1}, S_{t_{i-1}})\Delta t_i$. Do vậy, giá quyền chọn với chi phí thanh khoản thỏa phương trình sau:

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + 2\psi'(0)x C_{xx})x^2 C_{xx} = 0, \quad C(1, x) = h(x) \quad (15)$$

Về cơ bản thì phương trình (15) là một dạng mở rộng của phương trình định giá Black-Scholes với độ biến động như sau:

$$\tilde{\sigma}^2(t, x) = \sigma^2(1 + 2\psi'(0)x C_{xx})$$

Trong cách tiếp cận này, độ biến động hiệu chỉnh không còn phụ thuộc vào tham số n mà phụ thuộc vào Gamma của giá quyền chọn. Tính chất này có thể được giải thích bởi việc chiến lược tối ưu hầu như bằng với chiến lược Delta cổ điển với giao dịch nhiều hơn trên miền tương ứng với Gamma có giá trị lớn. Ku và cộng sự (2012) đã chứng minh rằng việc sử dụng chiến lược Delta bảo hộ liên kết với phương trình (15) sẽ dẫn đến kết quả bảo hộ trung bình bằng 0 với chi phí thanh khoản. Cụ thể, bằng cách áp dụng luật số lớn cho chiến thuật Martingales, Ku và cộng sự (2012) khẳng định sự hội tụ hầu là chắc chắn khi Δt tiến về 0.

Tuy nhiên, vấn đề tồn tại nghiệm của phương trình (15) chưa được thảo luận và “nghiệm” được đề xuất dưới dạng xấp xỉ theo số hạng thanh khoản $\psi'(0)$ (khá nhỏ trong thực tế).

5. Bảo hộ xấp xỉ với chi phí thanh khoản

Nhiều nhà giao dịch trên thực tế dùng chiến lược Black-Scholes để bảo hộ các sản phẩm phái sinh (Derivatives). Với chi phí thanh khoản, việc bảo hộ quyền chọn trở nên rủi ro hơn và dẫn đến đắt đỏ hơn, vì rủi ro mới này sẽ phải được tính vào bài toán bảo hộ của người bán. Theo ý tưởng mấu chốt của thuật toán Leland, việc tăng độ biến động thị trường có thể bù lại rủi ro thanh khoản trong bài toán bảo hộ. Tiếp theo, tác giả sẽ chỉ ra rằng trong mô hình CJP với đường cung tổng quát, siêu bảo hộ (Super-Replication) có thể thu được xấp xỉ bằng cách dùng chiến lược Leland.

5.1. Độ biến động hiệu chỉnh và chiến lược bảo hộ với chi phí thanh khoản

Giả sử danh mục đầu tư được điều chỉnh (giao dịch) tại các thời điểm $t_i = g(i/n)$, $i = 1, \dots, n$ với:

¹ Xem thêm các thảo luận trong bài báo của Gokay và cộng sự (2011).

$$g(t) = 1 - (1 - t)^\mu, \quad \mu \geq 1 \quad (16)$$

Theo Leland (1985) thì độ biến động trong PDE Black-Scholes định giá được hiệu chỉnh bởi:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \sigma_0^2 + \varrho \sqrt{nf'(t)}, \quad \varrho = \kappa_0 \sigma_0 \sqrt{8/\pi} \quad (17)$$

Trong đó: $f = g^{-1}$. Tốc độ hội tụ sẽ được xác định bởi n^β , trong đó:

$$\frac{1}{4} \leq \beta := \frac{\mu}{2(\mu+1)} \quad (18)$$

Theo mô hình CJP ở trên, tổng chi phí thanh khoản được viết như sau:

$$L_1^n = \sum_{0 \leq t \leq 1} \Delta \gamma_t^n (S(t, \Delta \gamma_t^n) - S(t, 0)) = L_0 + \sum_{i=1}^n \Delta \gamma_{t_i}^n (S(t_i, \Delta \gamma_{t_i}^n) - S(t_i, 0)) \quad (19)$$

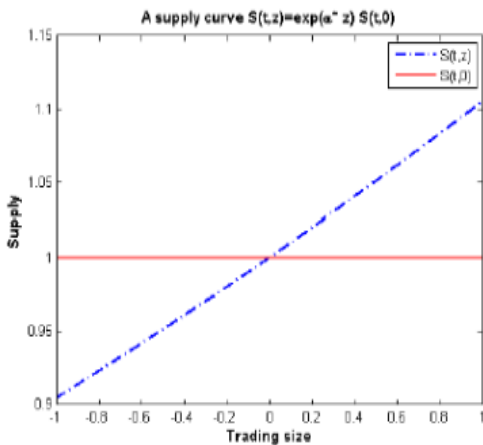
Trong đó:

$$L_0 = \gamma_0 (S(0, \gamma_0) - S(0, 0)) = \gamma_0 (S(0, \gamma_0) - S_0)$$

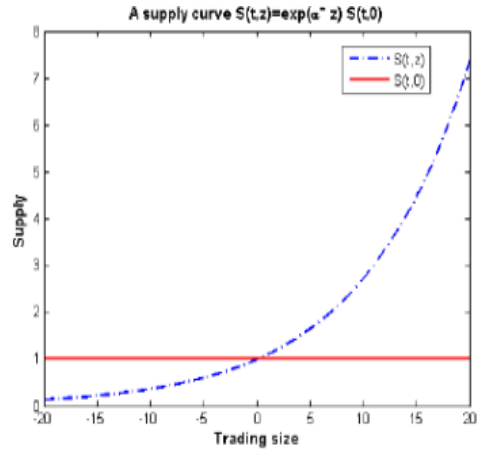
là chi phí thanh khoản ban đầu; và $\Delta \gamma_{t_i}^n = \gamma_{t_i}^n - \gamma_{t_{i-1}}^n$ là khối lượng giao dịch giữa hai thời điểm t_{i-1} và t_i .

Ký hiệu Q_1^n là chi phí thanh khoản tích lũy không bao gồm giá trị ban đầu L_0 , nghĩa là:

$$Q_1^n = \sum_{i=1}^n \Delta \gamma_{t_i}^n (S(t_i, \Delta \gamma_{t_i}^n) - S(t_i, 0)) \quad (20)$$



(a) Zoom in



(b) Zoom out

Hình 4. Đồ thị phóng to và thu nhỏ của đường cung $S(t, z) = e^{0.01z} S(t, 0)$

Xuyên suốt mục này, tổng chi phí thanh khoản Q_1^n là xấp xỉ bằng 0 khi đường cung là một hàm liên tục theo S . Giá trị danh mục đầu tư hiện tại được cho bởi công thức sau:

$$V_1^n = V_0^n + \int_0^1 \gamma_t^n dS_t - L_1^n$$

Trong đó, V_0^n là giá trị danh mục đầu tư ban đầu. Do vậy, sai số bảo hộ là:

$$V_1^n - h(S_1) = C_0 + \frac{1}{2} I_{1,n} + I_{2,n} - I_{3,n} Q_1^n \quad (21)$$

Trong đó, Q_1^n được định nghĩa bởi (20), $C_0 = V_0^n - L_0 - \hat{C}(0, S_0)$; và $I_{i,n}$, $i = 1, 2, 3$ được cho bởi:

$$I_{1,n} = \int_0^1 (\hat{\sigma}_t^2 - \sigma^2(y_t)) S_t^2 \hat{C}_{xx}(t, S_t) dt ; \text{ và}$$

$$I_{2,n} = \int_0^1 (\gamma_t^n - \hat{C}_x(t, S_{t-})) dS_t$$

Giả sử rằng vốn ban đầu thỏa mãn $V_0^n = L_0 + \hat{C}(0, S_0)$ để $C_0 = 0$.

5.2. Bảo hộ xấp xỉ với đường cung tron

Giả sử rằng đường cung được biểu diễn bởi phương trình:

$$S(t, x) = \psi(z)S(t, 0) \quad (22)$$

Trong đó, ψ là một hàm liên tục tăng thuộc lớp C^2 thỏa mãn $\psi(0) = 1$. Ví dụ như hàm $\psi(z) = e^{\alpha z}$ với $\alpha > 0$. Chú ý rằng:

$$h(S_1) + \min(S_1, K) = \max(S_1 - K, 0) + \min(S_1, K) = S_1 \quad (23)$$

Dưới đây là kết quả tiệm cận đầu tiên.

• **Định lý 4:** Giả sử rằng ψ là một hàm liên tục tăng thuộc lớp C^2 thỏa mãn $\psi(0) = 1$. Khi đó dãy $n^\beta(V_1^n - S_1)$ hội tụ yếu đến một biến ngẫu nhiên Gauss trung tâm hỗn hợp (Centered Mixed Gaussian Variable).

Từ Định lý 4 và phương trình (20), chúng ta nhận xét rằng quyền chọn được bảo hộ hầu chắc chắn một cách tiệm cận bởi chiến lược Leland khi số lượng giao dịch lớn. Thực tế thì chiến lược Leland sẽ xấp xỉ chiến lược mua và giữ (Buy-and-Hold Strategy) với khoản đầu tư ban đầu xấp xỉ $L_0 + S_0$. Hơn nữa, dãy giá trị danh mục đầu tư đáo hạn sẽ hội tụ về $\min(K, S_1)$. Như vậy, chúng ta thu được một chặn trên của giá siêu bảo hộ cho quyền chọn. Điều này phù hợp với kết luận trong các bài báo của Çetin và cộng sự (2010b), Gokay và cộng sự (2011) như sau: Mô hình chi phí thanh khoản CJP sinh ra một phí thanh khoản (Liquidity Premium) khác 0 ngay cả khi giao dịch được thực hiện một cách liên tục.

Để kết thúc, chúng ta lưu ý rằng với đường cung không liên tục tại 0 (tính chất này đặc trưng cho biên độ cung cầu (Bid-Ask Spread)) thì chi phí thanh khoản thực hiện sẽ ảnh hưởng đến sai số bảo hộ tiệm cận theo cách tương tự như đối với chi phí giao dịch tỷ lệ.

○ Chứng minh Định lý 4: Có thể được trình bày theo lược đồ chung được giới thiệu trong các bài báo của Nguyen và Pergamenschikov (2017, 2020) như sau:

- **Bước 1:** Xác định số hạng chính của sai số bảo hộ. Cụ thể, ta cần chứng minh đại lượng I_n hội tụ hầu khắp nơi về $\min(S_1; K)$, trong khi đó, tổng chi phí thanh khoản hội tụ về 0 với tốc độ n^β .

- **Bước 2:** Biểu diễn số hạng thặng dư theo bậc n^β (tích phân ngẫu nhiên Itô) như một dãy Martingale. Bước này thường đòi hỏi thủ tục rời rạc hóa các số hạng tích phân Itô ngẫu nhiên bởi một kỹ thuật xấp xỉ phù hợp.

- *Bước 3*: Xác định phân phối tiệm cận bằng cách áp dụng định lý giới hạn trung tâm cho Martingales. Để thuận tiện, tác giả giới thiệu kết quả sau đây trong bài báo của Hall và Heyde (1980) để nghiên cứu phân phối tiệm cận của Martingales rời rạc.

• **Định lý 5:** (Định lý giới hạn trung tâm Martingale (Hall & Heyde, 1980)): Cho $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ là một Martingale khả tích bậc hai và có giá trị trung bình bằng 0 và ζ là một biến ngẫu nhiên hữu hạn hầu chắc chắn. Giả sử rằng các hội tụ sau thỏa mãn theo nghĩa xác suất:

$$\sum_{i=1}^n E(X_i^2 1_{\{|X_i|>\delta\}} | \mathcal{F}_{i-1}) \rightarrow 0 \text{ với mọi } \delta > 0; \text{ và } \sum_{i=1}^n E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \rightarrow \zeta^2$$

Khi đó, (M_n) hội tụ yếu đến X với hàm đặc trưng của nó là $E \exp \left(-\frac{1}{2} \zeta^2 t^2 \right)$, nghĩa là X có phân phối hỗn hợp Gauss (Gaussian Mixture Distribution).

Vì khuôn khổ của bài báo có hạn, trong nội dung tiếp theo, tác giả trình bày tóm lược các bước chính của chứng minh và tham chiếu các bài báo của Nguyen và Pergamenschikov (2017, 2020) cho các phân tích và kết quả tổng quát hơn. Mệnh đề sau đây cho thấy rằng tổng chi phí thanh khoản trung gian có thể loại bỏ ở tiệm cận với tốc độ nhanh hơn n^β .

• **Mệnh đề 1** (Xấp xỉ của chi phí thanh khoản): Với mọi $m \geq 2$, các đẳng thức sau thỏa mãn theo nghĩa xác suất:

$$\sum_{i \geq 1} (\Delta \gamma_i^n)^m = o(n^{-\beta}); \text{ và } \sum_{i \geq 1} (\Delta \bar{\gamma}_i^n)^m = o(n^{-\beta})$$

○ *Chứng minh Mệnh đề 1*: Trước hết nhận xét rằng kết quả xấp xỉ trên đúng ngay cả trong mô hình tổng quát hơn với độ biến động ngẫu nhiên có hoặc bước nhảy, xem các bài báo của Nguyen và Pergamenschikov (2017, 2020). Dưới đây cung cấp một chứng minh tổng quát của Mệnh đề 1 trong mô hình với độ biến động ngẫu nhiên.

Từ công thức Itô, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_i^n = & \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\hat{C}_{xt}(u, S_u) + \sigma^2(y_u) S_u^2 \hat{C}_{xxx}(u, S_u) \right) du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \hat{C}_{xx}(u, S_u) \sigma(y_u) S_u dW_u^{(1)} \\ & + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{C}_x(u, S_{u-}(1+z)) - \hat{C}_x(u, S_{u-}) \right) J(dz \times du) \end{aligned}$$

Chú ý rằng, từ bài toán Cauchy (2), ta có:

$$\hat{C}_{xt}(u, x) = -\frac{1}{2} \hat{\sigma}_u^2 \left(2x \hat{C}_{xx}(u, x) + x^2 \hat{C}_{xxx}(u, x) \right)$$

Trước hết, ta chứng minh rằng với bất kỳ hàm A thỏa mãn điều kiện $(\tilde{H})$ trong các bài báo của Nguyen và Pergamenschikov (2017, 2020). Ta có:

$$\sum_{i \geq 1} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \hat{\sigma}_u^2 A(\lambda_u, \check{S}_u) du \right|^m = O(n^{-2\beta(m-1)}); \text{ và } \sum_{i \geq 1} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\lambda_u, \check{S}_u) dW_u^{(i)} \right|^m = o(n^{-\beta})$$

(24)

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Hölder ta thu được:

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A_u du \right|^m \leq |t_i - t_{i-1}|^{m-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |A_u|^m du \quad (25)$$

Cũng chú ý rằng $\hat{C}(t, x)$ và các đạo hàm của nó có thể được biểu diễn như hàm của λ_t và x , trong đó:

$$\lambda_t = \lambda_0(1 - t)^{\frac{1}{4\beta}} := \lambda_0 \nu(t) \quad \text{và} \quad \lambda_0 = \tilde{\mu} Q \sqrt{n} \quad (26)$$

Từ đó, ta có $\hat{\sigma}_u^2 = \lambda_0^{2/(\mu+1)} \lambda_u^{-\hat{\mu}}$, với $\hat{\mu} = (\mu - 1)/(\mu + 1)$. Dùng bất đẳng thức (25) ta chặn tổng tích phân đầu tiên của phương trình (24) bởi:

$$\sum_{i \geq 1} |t_i - t_{i-1}|^{m-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \hat{\sigma}_u^{2m} |A|^m(\lambda_u, \check{S}_u) du \leq C n^{-(m-1)} \lambda_0^{\frac{2(m-1)}{\mu+1}} \sum_{i \geq 1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda_u^{-(m-1)\hat{\mu}} \hat{\sigma}_u^2 |A|^m(\lambda_u, \check{S}_u) du$$

Hơn nữa, cũng từ quan hệ (26), tổng cuối bằng $\int_0^{\lambda_0} \lambda^{-(m-1)\hat{\mu}} |A|^m(\lambda, \check{S}_{u(\lambda)}) d\lambda$, và dãy này hội tụ hầu khắp nơi đến $\int_0^\infty \lambda^{-(m-1)\hat{\mu}} |A|^m(\lambda, \check{S}_{-}) d\lambda$

Do vậy, dùng $\lambda_0 \approx \sqrt{n}$ ta thu được dạng tiệm cận của tổng đầu tiên trong phương trình (24).

Tiếp theo, tác giả chứng minh khai triển thứ hai trong phương trình (24). Để xử lý tính bất khả tích trong mô hình với độ biến động ngẫu nhiên, tác giả sẽ làm việc trên tập $\{\tau^* = 1\}$, trong đó, τ là thời điểm đầu tiên mà quá trình độ biến động ngẫu nhiên vượt quá một hằng số dương cho trước (thời điểm dừng)². Rõ ràng rằng:

$$\begin{aligned} & P\left(n^\beta \sum_{i \geq 1} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\lambda_u, \check{S}_{u-}) dW_u^{(i)} \right|^m > \delta\right) \\ & < P\left(n^\beta \sum_{i \geq 1} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\lambda_u, \check{S}_{u-}) dW_u^{(i)} \right|^m > \delta, \tau^* = 1\right) + P(\tau^* < 1) \end{aligned}$$

Áp dụng lần lượt bất đẳng thức Chebychev và Burkholder-Davis-Gundy, xác suất đầu tiên ở vế phải bị chặn bởi:

$$\begin{aligned} 2n^{2\beta} \delta^{-2\beta} \sum_{i \geq 1} E \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\lambda_u, \check{S}_u^*) dW_u^{(i)} \right|^{2m} & \leq 2n^{2\beta} \delta^{-2\beta} \sum_{i \geq 1} E \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(\lambda_u, \check{S}_u^*) du \right|^m \\ & \leq 2C n^{2\beta} \delta^{-2\beta} n^{-(m-1)} E \int_0^1 |A|^m(\lambda_u, \check{S}_u^*) du \end{aligned}$$

Từ đây, dẫn đến kết quả của phương trình (24) cần chứng minh.

○ *Chứng minh Định lý 5:*

² Xem phần chứng minh trong các bài báo của Nguyen và Pergamenshchikov (2017, 2020).

Nhắc lại rằng $Q_1^n = \sum_{i=1}^n \Delta \gamma_{t_i}^n \left(S(t_i, \Delta \gamma_{t_i}^n) - S(t_i, 0) \right)$. Từ Mệnh đề 6.2 trong các bài báo của Nguyen và Pergamenshchikov (2017, 2020), ta thấy chỉ cần chỉ ra rằng số hạng chi phí thanh khoản Q_1^n hội tụ theo xác suất đến 0 nhanh hơn n^β . Để chứng minh điều đó, tác giả áp dụng khai triển Taylor tại 0 cho hàm ψ và thu được:

$$Q_1^n = \sum_{i \geq 1} \Delta \gamma_{t_i}^n S_{t_i} [\psi(\Delta \gamma_i^n) - \psi(0) \Delta \gamma_i^n] = \psi'(0) \sum_{i \geq 1} (\Delta \gamma_{t_i}^n)^2 S_{t_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \psi''(\epsilon_i) S_{t_i} (\Delta \gamma_i^n)^3$$

Trong đó, $\epsilon_i \in [0, \Delta \gamma_i^n]$ hoặc $\epsilon_i \in [\Delta \gamma_i^n, 0]$. Vì $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\Delta \gamma_t^n| \leq 1$ và ψ thuộc lớp C^2 , chúng ta cần chứng minh rằng với mọi bậc $m \geq 2$, chuỗi $\sum_{i \geq 1} (\Delta \gamma_i^n)^m$ hội tụ đến 0 theo xác suất nhanh hơn n^β , theo Mệnh đề 1.

Cuối cùng theo các kết quả xấp xỉ cũng trong các bài báo của Nguyen và Pergamenshchikov (2017, 2020) chúng ta có thể biểu diễn sai số bảo hộ như sau: $V_1^n - h(S_1) = \min(S_1, K) + U_n + o(n^\beta)$, trong đó: Martingale U_n là một Martingale rời rạc, hội tụ yếu đến một biến ngẫu nhiên Gauss hỗn hợp theo Định lý 5. Từ đó, kết quả giới hạn của chiến lược Leland trong Định lý 4 đã được chứng minh ■

Tài liệu tham khảo

- Avellaneda, M., Levy, A., & Parás, A. (1995). Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance*, 2(2), 73–88.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Blais, M., & Protter, P. (2010). An analysis of the supply curve for liquidity risk through book data. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(06), 821–838.
- Çetin, U., Jarrow, R. A., & Protter, P. (2004). Liquidity risk and arbitrage pricing theory. *Finance and Stochastic*, 8, 311–341.
- Çetin, U., Jarrow, R. A., & Protter, P. (2010a). Liquidity risk and arbitrage pricing theory. In *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management* (pp. 1007–1024). Boston, MA: Springer.
- Çetin, U., Sonner, H. M., & Touzi, N. (2010b). Option hedging for small investors under liquidity costs. *Finance and Stochastic*, 14(3), 317–341.
- Çetin, U., Jarrow, R. A., Protter, P., & Warachka, M. (2006). Pricing options in an extended Black Scholes economy with illiquidity: Theory and empirical evidence. *Review of Financial Studies*, 19(2), 493–529.
- Frey, R. (1998). Perfect option hedging for a large trader. *Finance and Stochastics*, 2(2), 115–141.
- Frey, R. (2000). Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging. In *Model Risk* (pp. 125–126). London: Risk Publications.
- Frey, R., & Polte, U. (2011). Nonlinear blackscholes equations in finance: Associated control problems and properties of solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 49(1), 185–204.
- Frey, R., & Stremme, A. (1997). Market volatility and feedback effects from dynamic hedging. *Mathematical Finance*, 7(4), 351–374.
- Gokay, S., Roch, A. F., & Soner, H. M. (2011). Liquidity models in continuous and discrete time. In *Advanced Mathematical Methods for Finance* (pp. 333–365). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Kabanov, Y. M., & Pergameshchikov, S. M. (2003). Two-scale stochastic systems. In *Applications of Mathematics*, 49. Verlag, Berlin: Springer.
- Kabanov, Y. M., & Safarian, M. (2009). *Markets with Transaction Costs: Mathematical Theory*. Verlag, Berlin: Springer.
- Kabanov, Y. M., & Safarian, M. (1997). On Leland's strategy of option pricing with transaction costs. *Finance and Stochastics*, 1, 239–250.
- Ku, H., Lee, K., & Zhu, H. (2012). Discrete time hedging with liquidity risk. *Finance Research Letters*, 9, 135–143.
- Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 40(5), 1283–1301.

- Denis, E., & Kabanov, Y. (2010). Mean square error for the Leland–Lott hedging strategy: Convex pay-offs. *Finance and Stochastics*, 14(4), 625–667.
- Lépinette, E., & Tran, T. (2014). Approximate hedging in a local volatility model with proportional transaction costs. *Applied Mathematical Finance*, 21(4), 313–341.
- Lépinette, E. (2008). *Marché avec coûts de transaction: Approximation de Leland et arbitrage*. These doctorale, Université de Franche-Comté Besançon.
- Lépinette, E. (2012). Modified Leland's strategy for constant transaction costs rate. *Mathematical Finance*, 22(4), 1–12.
- Liu, H., & Yong, J. (2005). Option pricing with an illiquid underlying asset market. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 29, 2125–2156.
- Nguyen, T. H., & Pergamenshchikov, S. (2017). *Mathematical Finance*, 27(3), 832–865.
- Nguyen, T. H., & Pergamenshchikov, S. (2020). Approximate hedging with proportional transaction costs in stochastic volatility models with jumps. *Siam Journal of Probability & Its Applications*, 65(2), 224–248.
- Roch, A. (2011). Liquidity risk, price impacts and the replication problem. *Finance and Stochastics*, 15(3), 399–419.
- Schombucher, P. J., & Wilmott, P. (2000). The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(1), 232–272.
- Sircar, K. R., & Papanicolaou, G. (1998). General black-scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 5(1), 45–82.
- Hall, P., & Heyde, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and Its Applications*. Academic Press.