

ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BLACK-SCHOLES-MERTON ĐỂ ĐỊNH GIÁ CHỨNG KHOÁN PHÁI SINH

TS. BÙI PHÚC TRUNG*

Lý thuyết định giá quyền chọn chứng khoán phái sinh là bước ngoặt vĩ đại trong thị trường tài chính hiện đại đã được Black, Scholes và Merton tìm ra năm 1973, có ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển của thị trường tài chính thế giới cho đến tận ngày nay.

Bài báo này sẽ giới thiệu mô hình Black-Scholes để định giá quyền chọn mua và chọn bán kiểu châu Âu trên chứng khoán không trả cổ tức, đồng thời giải thích cách ước lượng độ bất bênh từ những dữ liệu quá khứ hoặc tìm ra nó từ các mức giá quyền chọn bằng cách sử dụng mô hình này.

1. Giới thiệu

Trong những năm đầu thập niên 1970, Fischer Black, Myron Scholes và Robert Merton đã tạo nên một bước ngoặt lớn trong việc định giá quyền chọn chứng khoán. Bước ngoặt này liên quan đến sự phát triển của mô hình Black-Scholes. Đây là mô hình có ảnh hưởng lớn đến cách thức mà các nhà giao dịch định giá và bảo hộ các quyền chọn. Nó cũng là vấn đề then chốt ảnh hưởng đến sự phát triển và thành công của lĩnh vực tài chính trong những năm 1980 và 1990. Vào năm 1997, tầm quan trọng của mô hình này đã được công nhận khi Robert Merton và Myron Scholes nhận giải thưởng Nobel về kinh tế. Thật đáng tiếc, Fischer Black đã mất vào năm 1995, nếu không thì chắc chắn ông đã là một trong những người nhận giải thưởng này.

Bài báo này sẽ giới thiệu cách tìm ra mô hình Black-Scholes để định giá quyền chọn mua và bán kiểu châu Âu trên chứng khoán không trả cổ tức

2. Tính chất log chuẩn của giá chứng khoán

Mô hình về hoạt động của giá chứng khoán được dùng bởi Black, Scholes và Merton giả định rằng phần trăm thay đổi của giá chứng khoán trong một khoảng thời gian ngắn có phân phối chuẩn được định nghĩa như sau:

μ : Lợi suất kỳ vọng của chứng khoán

σ : Độ bất bênh của giá chứng khoán

Trung bình của phần trăm thay đổi trong khoảng thời gian δt và $\mu \delta t$ độ lệch chuẩn của phần trăm thay đổi này là $\sigma \sqrt{\delta t}$, cho nên:

$$\frac{\delta S}{S} \sim \phi(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t}) \quad (1)$$

Trong đó, δS là thay đổi của giá chứng khoán S tại thời điểm δt , và $\phi(m, s)$ thể hiện phân phối chuẩn có trung bình là m và độ lệch chuẩn là s .

Mô hình chỉ ra rằng:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma \sqrt{T}\right]$$

Từ điều này, ta có:

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma \sqrt{T}\right] \quad (2)$$

và

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma \sqrt{T}\right] \quad (3)$$

Trong đó, S_T là giá chứng khoán tại thời điểm tương lai T và S_0 là giá chứng khoán tại thời điểm 0. Phương trình (3) thể hiện rằng $\ln S_T$ có phân phối chuẩn. Điều này có nghĩa là S_T có phân phối log chuẩn.

Ví dụ 1: Xem xét một chứng khoán có giá ban đầu là 40 USD, lợi suất kỳ vọng là 16%/năm, và

độ bấp bênh là 20%/năm. Từ phương trình (3), xác suất phân phối của giá chứng khoán, S_T , trong khoảng thời gian 6 tháng được cho bởi:

$$\ln S_T \sim \phi[\ln 40 + (0,16 - 0,2^2 / 2) \times 0,5; 0,2\sqrt{0,5}]$$

$$\ln S_T \sim \phi(3,759; 0,141)$$

Có xác suất 95% để 1 biến có phân phối chuẩn sẽ có giá trị trong khoảng chênh lệch 1,96 lần độ lệch chuẩn so với giá trị trung bình của nó. Do đó, với độ tin cậy 95%, thì:

$$3,759 - 1,96 \times 0,141 < \ln S_T < 3,759 + 1,96 \times 0,141$$

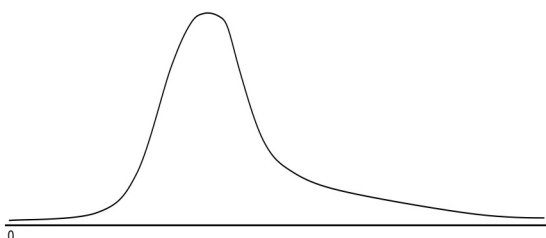
Điều này có thể được viết:

$$e^{3,759 - 1,96 \times 0,141} < S_T < e^{3,759 + 1,96 \times 0,141}$$

Hoặc

$$32,55 < S_T < 56,56$$

Vì vậy, có xác suất 95% để giá chứng khoán trong 6 tháng sẽ nằm giữa 32,55 và 56,56.



Hình 1. Phân phối log chuẩn

Một biến có phân phối log chuẩn thì có thể giữ bất kỳ giá trị nào trong khoảng từ 0 đến ∞ . Hình 1 minh họa hình dạng của một phân phối log chuẩn. Không giống như phân phối chuẩn, phân phối log chuẩn sẽ lệch trục đối xứng làm cho giá trị trung bình, trung vị và mode đều khác nhau. Từ phương trình (3) và các tính chất của phân phối log chuẩn, thì giá trị kỳ vọng $E(S_T)$ của S_T sẽ được cho như sau:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \quad (4)$$

Kết quả này phù hợp với định nghĩa về tỷ suất lợi nhuận kỳ vọng μ . Phương sai $\text{var}(S_T)$ của S_T được tính như sau:

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (5)$$

Ví dụ 2: Xem xét một chứng khoán với giá hiện hành là 20 USD, lợi suất kỳ vọng là 20%/năm, độ bấp bênh là 40%/năm. Giá chứng khoán kỳ vọng trong một năm, $E(S_T)$, và phương sai của giá chứng khoán trong một năm, $\text{var}(S_T)$, được tính bằng:

$$E(S_T) = 20e^{0,2 \times 1} = 24,43$$

$$\text{var}(S_T) = 400e^{2 \times 0,2 \times 1} (e^{0,4^2 \times 1} - 1) = 103,54$$

Độ lệch chuẩn của giá chứng khoán trong một

năm bằng $\sqrt{103,54}$ hoặc 10,18.

3. Phân phối của tỷ suất lợi nhuận

Tính chất log chuẩn của giá chứng khoán có thể được sử dụng để cung cấp thông tin về phân phối xác suất của tỷ suất lợi nhuận được ghép liên tiếp của một loại chứng khoán trong khoảng giữa thời điểm 0 và T. Định nghĩa tỷ suất lợi nhuận được ghép liên tiếp mỗi năm trong khoảng giữa thời điểm 0 và T là η . Vì vậy,

$$S_T = S_0 e^{\eta T}$$

cho nên

$$\eta = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \quad (6)$$

Từ phương trình (2), ta có

$$\eta \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right) \quad (7)$$

Vậy, tỷ suất lợi nhuận được ghép liên tiếp mỗi năm có phân phối chuẩn với trung bình bằng $\mu - \sigma^2/2$ và độ lệch chuẩn bằng $\sigma/\sqrt{T}$

Ví dụ 3: Xem xét một chứng khoán có lợi suất kỳ vọng là 17%/năm và độ bấp bênh là 20%/năm. Phân phối xác suất của tỷ suất lợi nhuận thực tế (được ghép liên tiếp) thu được qua 3 năm là phân phối chuẩn có trung bình bằng:

$$0,17 - \frac{0,2^2}{2} = 0,15 \text{ hoặc } 15\%/\text{năm}$$

và độ lệch chuẩn bằng:

$$\frac{0,2}{\sqrt{3}} = 0,1155 \text{ hoặc } 11,55\%/\text{năm}$$

Bởi vì có 95% khả năng để một biến có phân phối chuẩn sẽ nằm trong khoảng chênh lệch 1,96 lần độ lệch chuẩn so với trung bình của nó, cho nên chúng ta tin rằng 95% lợi suất thực tế thu được qua 3 năm sẽ nằm trong khoảng -7,6% và +37,6%/năm.

4. Ước lượng độ bấp bênh từ những dữ liệu theo thời gian

Để ước lượng độ bấp bênh của giá chứng khoán theo thực nghiệm, thì giá chứng khoán thường được quan sát tại những khoảng thời gian cố định (ví dụ là mỗi ngày, mỗi tuần, hay mỗi tháng) được định nghĩa như sau:

$n + 1$: Số quan sát

S_i : Giá chứng khoán tại thời điểm kết thúc của khoảng thứ i ($i=0,1,\dots,n$)

τ : Độ dài của khoảng thời gian theo năm

và cho

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

với $i = 1, 2, \dots, n$.

Ước lượng thông thường s về độ lệch chuẩn của các giá trị u_i được cho như sau:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

hay

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^2}$$

trong đó $\bar{u}$ là trung bình của các giá trị u_i .

Từ phương trình (2), độ lệch chuẩn của các giá trị u_i là $\sigma\sqrt{\tau}$. Do đó, biến s là một ước lượng của $\sigma\sqrt{\tau}$. Vì vậy, σ có thể được ước lượng dưới dạng $\hat{\sigma}$, trong đó:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Độ lệch chuẩn của ước lượng này có thể xấp xỉ bằng $\hat{\sigma} / \sqrt{2n}$.

Lựa chọn một giá trị n thích hợp là điều không đơn giản. Càng nhiều dữ liệu thì kết quả thường chính xác hơn nhưng σ lại thay đổi theo thời gian và dữ liệu trở nên quá cũ, không thể thích hợp cho dự đoán tương lai. Một thỏa thuận hợp lý nhất có thể là sử dụng các mức giá đóng cửa hàng ngày trong khoảng 90 đến 180 ngày gần nhất. Một quy tắc thực nghiệm thường dùng là cho n bằng với số ngày để áp dụng độ bấp bênh. Do đó, nếu chúng ta ước lượng độ bấp bênh để định giá một quyền chọn thời hạn 2 năm, thì chúng ta phải sử dụng dữ liệu hàng ngày trong vòng 2 năm qua.

Một vấn đề quan trọng là liệu rằng thời gian nên được đo theo ngày trên lịch hay theo ngày giao dịch khi ước lượng và sử dụng các tham số của độ bấp bênh. Chúng ta thấy rằng, nghiên cứu thực nghiệm chỉ ra là nên sử dụng các ngày giao dịch. Mặt khác, để tính độ bấp bênh, chúng ta nên bỏ qua những ngày khi sở giao dịch đóng cửa.

Ví dụ 4: Bảng 1 đưa ra một dãy các mức giá chứng khoán trong suốt 21 ngày giao dịch liên tiếp. Trong trường hợp này,

$$\sum u_i = 0,09531 \text{ và } \sum u_i^2 = 0,00326$$

Bảng 1. Kết quả tính độ bấp bênh

Ngày	Giá chứng khoán lúc đóng cửa (USD)	Quan hệ giá S_i/S_{i-1}	Lợi suất hàng ngày $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$
0	20,00		
1	20,10	1,00500	+0,00499
2	19,90	0,99005	-0,01000
3	20,00	1,00503	+0,00501
4	20,50	1,02500	+0,02469
5	25,25	0,98780	-0,01227
6	20,90	1,03210	+0,03159
7	20,90	1,00000	+0,00000
8	20,90	1,00000	+0,00000
9	20,75	0,99282	-0,00720
10	20,75	1,00000	+0,00000
11	21,00	1,01205	+0,01198
12	21,10	1,00476	+0,00475
13	20,90	0,99052	-0,00952
14	20,90	1,00000	+0,00000
15	21,25	1,01675	+0,01661
16	21,40	1,00706	+0,00703
17	21,40	1,00000	+0,00000
18	21,25	0,99299	-0,00703
19	21,75	1,02353	+0,02326
20	22,00	1,01149	+0,01143

và ước lượng độ lệch chuẩn của lợi suất hàng ngày là:

$$\sqrt{\frac{0,00326}{19} - \frac{0,09531^2}{380}} = 0,01216$$

hoặc 1,216%. Giả định rằng có 252 ngày giao dịch mỗi năm, $\tau = 1/252$ và dữ liệu này đưa ra một ước lượng về độ bấp bênh hàng năm là

$0,01216\sqrt{252} = 0,193$, hoặc 19,3%. Sai số chuẩn của ước lượng này là:

$$\frac{0,193}{\sqrt{2 \times 20}} = 0,031$$

hoặc 3,1%/năm.

Công thức ước lượng trên được giả định cho chứng khoán không trả cổ tức, nhưng nó có thể được sửa đổi để thích hợp với chứng khoán có trả cổ tức. Lợi suất u_i trong suốt một khoảng thời gian mà có thời điểm không có cổ tức sẽ được tính bằng cách:

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

Trong đó, D là lượng cổ tức. Lợi suất trong các khoảng thời gian khác vẫn là:

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

Tuy nhiên, khi yếu tố thuế đóng vai trò xác định các mức lợi suất quanh thời điểm không có cổ tức, thì tốt nhất có lẽ nên loại bỏ tất cả những dữ liệu về các khoảng thời gian mà có thời điểm không có cổ tức.

5. Các giả thiết của phương trình vi phân Black-Scholes-Merton

Chúng ta sử dụng các giả thiết sau để tìm phương trình vi phân Black-Scholes-Merton:

1. Giá chứng khoán tuân theo quá trình thay đổi với μ và σ không đổi.
2. Chấp nhận việc bán khống chứng khoán để sử dụng toàn bộ số tiền thu được.
3. Không có chi phí giao dịch và không có thuế. Tất cả chứng khoán thì hoàn toàn có thể chia được.
4. Không có cổ tức trong suốt thời kỳ tồn tại của phái sinh.
5. Không có các cơ hội cơ lợi.
6. Giao dịch chứng khoán diễn ra liên tục.
7. Lãi suất phi rủi ro r không đổi và như nhau đối với tất cả các kỳ đáo hạn.

Khi chúng ta thảo luận, thì có thể bỏ một vài giả định trên. Ví dụ: σ và r được biết như là một hàm của t . Chúng ta có thể cho phép các mức lãi suất là ngẫu nhiên miễn sao phân phối của giá chứng khoán tại kỳ đáo hạn của quyền chọn vẫn là phân phối log chuẩn.

6. Nguồn gốc của phương trình vi phân Black-Scholes-Merton

Quá trình thay đổi của giá chứng khoán mà chúng ta đang giả định sẽ là quá trình như sau.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (8)$$

Giả sử rằng f là giá của một quyền chọn mua hoặc một phái sinh khác phụ thuộc vào S . Biến f chắc hẳn là một hàm số nào đó theo S và t . Do đó ta có:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (9)$$

Các dạng rời rạc của phương trình (8) và (9) là:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (10)$$

và

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (11)$$

Trong đó, ΔS và Δf là những thay đổi của S và f trong một khoảng thời gian nhỏ Δt . Ta thấy rằng các quá trình Wiener làm cơ sở cho f và S là như nhau. Mặt khác, $\Delta z (= \sqrt{\Delta t})$ trong các phương trình (10) và (11) thì tương tự nhau. Do đó, bằng cách lựa chọn một danh mục đầu tư bao gồm một chứng khoán và một phái sinh, thì quá trình Wiener có thể được khử đi.

Danh mục đầu tư thích hợp như sau:

- 1: phái sinh
- + $\frac{\partial f}{\partial S}$: các cổ phiếu

Người nắm giữ danh mục đầu tư này có vị thế bán trên một phái sinh và có vị thế mua trên một lượng cổ phiếu là $\partial f / \partial S$. Định nghĩa Π là giá trị của danh mục đầu tư. Theo định nghĩa,

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (12)$$

Thay đổi giá trị $\Delta \Pi$ của danh mục đầu tư trong khoảng thời gian Δt được cho là:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (13)$$

Thay thế phương trình (10) và (11) vào phương trình (13) thu được:

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (14)$$

Bởi vì phương trình này không liên quan đến Δz , cho nên danh mục đầu tư chắc hẳn sẽ không có rủi ro trong suốt khoảng thời gian Δt . Những giả định mà chúng ta đã liệt kê trong phần trước cho thấy rằng danh mục đầu tư này ngay lập tức phải kiếm được cùng tỷ suất lợi nhuận với các chứng khoán phi rủi ro khác trong ngắn hạn. Nếu danh mục đầu tư kiếm được nhiều hơn mức lợi suất này, thì những nhà cơ lợi có thể kiếm được một khoản lợi nhuận phi rủi ro bằng cách vay tiền để mua danh mục đầu tư này; nếu danh mục đầu tư kiếm được ít hơn mức lợi suất này, thì những nhà cơ lợi có thể kiếm được một khoản lợi nhuận phi rủi ro bằng cách bán danh mục đầu tư này và mua các chứng khoán phi rủi ro. Do đó,

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

Trong đó, r là lãi suất phi rủi ro. Thay từ các phương trình (12) và (14) vào, chúng ta được:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

cho nên

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (15)$$

Phương trình (15) chính là phương trình vi phân Black-Scholes-Merton. Nó có nhiều cách giải, tương ứng với tất cả các phái sinh khác nhau mà có thể được xác định với biến cơ sở S. Khi giải phương trình này, thì việc tính một phái sinh cụ thể nào đó phụ thuộc vào việc sử dụng những điều kiện biên. Những điều kiện biên này xác định các giá trị của phái sinh tại các giá trị giới hạn có thể của S và t. Trong trường hợp của một quyền chọn mua kiểu châu Âu, điều kiện biên chính là:

$$f = \max(S - K, 0) \text{ khi } t = T$$

Trong trường hợp của một quyền chọn bán kiểu châu Âu, điều kiện biên chính là:

$$f = \max(K - S, 0) \text{ khi } t = T$$

Một vấn đề về danh mục đầu tư trong quá trình tìm ra phương trình (15) nên được nhấn mạnh là danh mục đầu tư này không phải lúc nào cũng không có rủi ro. Nó chỉ không có rủi ro trong một khoảng thời gian rất nhỏ. Khi S và t thay đổi, thì $\partial f / \partial S$ cũng thay đổi. Do đó, để giữ cho danh mục đầu tư không có rủi ro, thì cần phải thường xuyên thay đổi những tỷ lệ cân xứng giữa phái sinh và chứng khoán trong danh mục đầu tư.

Ví dụ 5: Một hợp đồng kỳ hạn trên chứng khoán không trả cổ tức là một phái sinh phụ thuộc vào chứng khoán. Như vậy, nó phải thỏa mãn phương trình (15). Chúng ta biết rằng giá trị hợp đồng kỳ hạn, f, tại thời điểm tổng quát t được cho cùng với giá chứng khoán S tại thời điểm này bởi:

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

Trong đó, K là giá chuyển nhượng. Điều này có nghĩa là:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

Khi thay những biểu thức trên vào vế trái phương trình (15), ta được:

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS$$

Biểu thức này bằng với rf, như vậy cho thấy phương trình (15) đã được thỏa mãn.

7. Ứng dụng để định giá cho hợp đồng kỳ hạn trên chứng khoán

Ví dụ 5, chúng ta đã kiểm tra rằng công thức định giá thì thỏa mãn phương trình vi phân Black-Scholes. Trong phần này, chúng ta sẽ lập công thức định giá từ nguyên tắc định giá rủi ro

trung hòa. Chúng ta đưa ra một giả định rằng lãi suất là hằng số và bằng r.

Xét một hợp đồng kỳ hạn mua mà đáo hạn tại thời điểm T với giá chuyển nhượng K, thì giá trị của hợp đồng này tại thời điểm đáo hạn là:

$$S_T - K$$

Trong đó, S_T là giá chứng khoán tại thời điểm T. Từ phần thảo luận về nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa, thì giá trị của hợp đồng kỳ hạn tại thời điểm 0 là giá trị kỳ vọng của nó tại thời điểm T trong môi trường rủi ro trung hòa được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro. Nếu chúng ta kỳ hiệu giá trị của hợp đồng kỳ hạn tại thời điểm 0 là f, điều này có nghĩa là:

$$f = e^{-rT} \hat{E}(S_T - K) \quad (16)$$

Trong đó, $\hat{E}$ biểu hiện giá trị kỳ vọng trong môi trường rủi ro trung hòa. Vì K là một hằng số, nên phương trình (16) trở thành:

$$f = e^{-rT} \hat{E}(S_T) - Ke^{-rT} \quad (17)$$

Tỷ lệ tăng của giá chứng khoán, μ trở thành r trong môi trường rủi ro trung hòa. Như vậy, từ phương trình (4), thì:

$$\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT} \quad (18)$$

Thay phương trình (18) vào phương trình (17), ta có:

$$f = S_0 - Ke^{-rT} \quad (19)$$

8. Công thức định giá Black-Scholes

Công thức Black-Scholes cho giá tại thời điểm 0 của một quyền chọn mua và quyền chọn bán kiểu châu Âu trên chứng khoán không trả cổ tức là:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (20)$$

và

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (21)$$

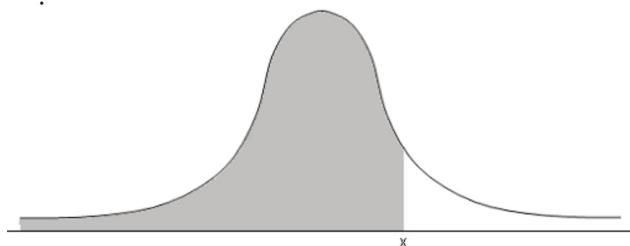
Trong đó

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Hàm N(x) là hàm phân phối xác suất tích lũy của một phân phối chuẩn tắc. Mặt khác, đó là xác suất để một biến có phân phối chuẩn tắc $\phi(0,1)$ sẽ nhỏ hơn x. Phân phối xác suất này được minh họa ở Hình 2. Những biến còn lại thì tương tự. Biến c và p là giá của quyền chọn mua và quyền chọn bán kiểu châu Âu, S_0 là giá chứng khoán tại thời điểm 0, K là giá thực hiện, r là lãi suất phi rủi ro

được ghép liên tiếp, σ là độ bấp bênh của giá chứng khoán, và T là thời điểm đáo hạn của quyền chọn.



Hình 2. Phần tô đậm tương trưng cho phân phối

Một cách để tìm ra công thức Black-Scholes là giải phương trình vi phân (5) theo những điều kiện biên. Một phương pháp khác là dùng nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa. Xét một quyền chọn mua kiểu châu Âu. Giá trị kỳ vọng của quyền chọn tại thời điểm đáo hạn trong môi trường rủi ro trung hòa là:

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

trong đó $\hat{E}$ biểu hiện giá trị kỳ vọng trong môi trường rủi ro trung hòa.

Từ phần thảo luận về nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa, giá của quyền chọn mua kiểu châu Âu, c là giá trị kỳ vọng được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro, nghĩa là:

$$c = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \quad (22)$$

Điều đó cho thấy rằng phương trình này dẫn đến kết quả ở phương trình (20).

Để làm rõ những số hạng trong phương trình (20), chúng ta chú ý rằng nó có thể được viết như sau:

$$c = e^{-rT} [S_0 N(d_1) e^{rT} - KN(d_2)] \quad (23)$$

Biểu thức $N(d_2)$ là xác suất mà quyền chọn sẽ được thực hiện trong môi trường rủi ro trung hòa, cho nên $KN(d_2)$ bằng với giá thực hiện nhân với xác suất mà giá thực hiện sẽ được thanh toán. Trong một môi trường rủi ro trung hòa, thì biểu thức $S_0 N(d_1) e^{rT}$ là giá trị kỳ vọng của một biến, nó sẽ bằng S_T nếu $S_T > K$ và bằng 0 trong trường hợp ngược lại.

Khi sử dụng công thức Black-Scholes trong thực tế, thì lãi suất được cho bằng với lãi suất phi rủi ro của trái phiếu không lãi có kỳ đáo hạn T . Như chúng ta sẽ xét trong những phần sau, thì sự bằng nhau này đúng về mặt lý thuyết khi r là một hàm số biết trước theo thời gian. Nó cũng đúng về mặt lý thuyết khi lãi suất là ngẫu nhiên miễn sao là giá chứng khoán tại thời điểm T có phân phối log chuẩn và tham số độ bấp bênh được lựa

chọn thích hợp.

9. Ứng dụng để định giá quyền chọn kiểu châu Âu

Các quyền chọn kiểu châu Âu có thể được phân tích bằng cách giả định rằng giá chứng khoán là tổng của 2 thành phần: Một thành phần phi rủi ro mà tương ứng với các mức cổ tức biết trước trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn và một thành phần có rủi ro. Tại bất cứ thời điểm nào đã cho, thành phần phi rủi ro sẽ bằng với giá trị hiện tại của tất cả các mức cổ tức trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn, được chiết khấu trong hiện tại tương ứng với những thời điểm không có cổ tức tại mức lãi suất phi rủi ro. Khi quyền chọn đáo hạn, thì các mức cổ tức sẽ được thanh toán và thành phần phi rủi ro sẽ không còn xuất hiện nữa. Do đó, công thức Black-Scholes sẽ đúng nếu S_0 bằng với thành phần có rủi ro của giá chứng khoán và σ là độ bấp bênh trong quá trình thay đổi của thành phần có rủi ro. Điều này có nghĩa là có thể sử dụng công thức Black-Scholes miễn sao là giá chứng khoán được trừ bớt một lượng bằng với giá trị hiện tại của tất cả các mức cổ tức trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn, với việc chiết khấu được tính tương ứng với những thời điểm không có cổ tức tại mức lãi suất phi rủi ro. Cổ tức sẽ được tính trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn, chỉ với điều kiện là có xuất hiện thời điểm không có cổ tức trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn.

Ví dụ 6: Xét một quyền chọn mua kiểu châu Âu trên một chứng khoán khi có thời điểm không có cổ tức trong 2 tháng và 5 tháng. Cổ tức vào mỗi thời điểm không có cổ tức được kỳ vọng là 0,5 USD. Giá cổ phiếu hiện hành là 40 USD, giá thực hiện là 40 USD, độ bấp bênh của giá chứng khoán là 30%/năm, lãi suất phi rủi ro là 9%/năm, và thời gian đáo hạn là 6 tháng. Giá trị hiện tại của cổ tức là:

$$0,5e^{-0,1667 \times 0,09} + 0,5e^{-0,4167 \times 0,09} = 0,9741$$

Vì vậy, giá quyền chọn có thể được tính từ công thức Black-Scholes với $S_0=39,0259$, $K=40$, $r=0,09$, $\sigma=0,3$ và $T=0,5$. Chúng ta có:

$$d_1 = \frac{\ln(39,0259 / 40) + (0,09 + 0,3^2 / 2) \times 0,5}{0,3\sqrt{0,5}} = 0,2017$$

$$d_2 = \frac{\ln(39,0259 / 40) + (0,09 - 0,3^2 / 2) \times 0,5}{0,3\sqrt{0,5}} = -0,0104$$

Sử dụng đa thức gần đúng cho ta:

$$N(d_1)=0,5800; \quad N(d_2)=0,4959$$

và, từ phương trình (20), giá quyền chọn mua là:

$$39,0259 \times 0,5800 - 40e^{-0,09 \times 0,5} \times 0,4959 = 3,67$$

hay 3,67 USD.

10. Kết luận

Bài báo đã chỉ ra những tính chất của quá trình thay đổi giá chứng khoán. Quá trình này gợi ý rằng giá của một loại chứng khoán tại một thời điểm tương lai nào đó, cho trước giá chứng khoán hiện tại, thì có phân phối log chuẩn. Nó cũng gợi ý rằng lợi suất ghép liên tục của chứng khoán đó trong một khoảng thời gian thì có phân phối chuẩn. Sự không chắc chắn của chúng ta về các mức giá chứng khoán trong tương lai tăng khi chúng ta xem xét xa hơn. Độ lệch chuẩn của log của giá chứng khoán thì tỉ lệ với căn bậc hai của khoảng thời gian mà chúng ta đang xét.

Để ước lượng độ bất bình, σ , của giá chứng khoán theo thực nghiệm, thì giá chứng khoán được quan sát tại những khoảng thời gian cố định (ví dụ như mỗi ngày, mỗi tuần, hoặc mỗi tháng). Đối với mỗi khoảng thời gian, chúng ta sẽ tính log của tỷ số giá chứng khoán ở cuối khoảng thời gian trên giá chứng khoán. Độ bất bình được ước lượng như là độ lệch chuẩn của những số này chia cho căn bậc hai của độ dài khoảng thời gian theo năm. Thông thường, với mục đích để tính độ bất bình, thì chúng ta sẽ bỏ qua những ngày mà sở giao dịch đóng cửa khi đo lường thời gian.

Chúng ta có thể tìm được phương trình vi phân cho giá của bất kỳ phái sinh nào mà phụ thuộc vào một loại chứng khoán bằng cách tạo ra một vị thế phi rủi ro trong quyền chọn và chứng khoán đó. Vì cả hai giá phái sinh và giá chứng khoán cùng phụ thuộc vào một nguồn cơ sở không chắc chắn, cho nên luôn luôn có thể tìm được phương trình vi phân. Vị thế được tạo ra sẽ duy trì phi rủi ro chỉ trong một khoảng thời gian rất ngắn. Tuy nhiên, lợi suất dựa trên vị thế phi rủi ro đó phải luôn luôn là lãi suất phi rủi ro nếu không có những cơ hội cơ lợi.

Các phương trình Black-Scholes cho các quyền chọn mua và bán kiểu châu Âu có thể tìm được bằng cách giải phương trình vi phân của chúng hoặc sử dụng nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa.

Các kết quả Black-Scholes có thể được mở rộng cho các quyền chọn mua và bán kiểu châu Âu trên chứng khoán có trả cổ tức. Thủ tục này sẽ sử dụng công thức Black-Scholes với giá chứng khoán giảm

một lượng bằng với giá trị hiện hành của các cổ tức đã lường trước trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn, và độ bất bình của giá chứng khoán sẽ bằng với độ bất bình của giá chứng khoán đã trừ đi giá trị hiện hành của những cổ tức này■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Blattberg, R. & N. Gonedes, "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", *Journal of Business*, 47 (tháng 4/1974), 244-80.
2. Fama, E. F., "The Behavior of Stock Prices", *Journal of Business*, 38 (tháng 1/1965), 34-105.
3. Kon, S. J., "Models of Stock Returns-A Comparisons", *Journal of Finance*, 39 (03/1984), 147-65.
4. Richardson, M. & T. Smith, "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns", *Journal of Business*, 66 (1993), 295-321.
5. Black, F., & M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (tháng 5 và tháng 6/1973), 637-59.
6. Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Mùa xuân năm 1973), 141-183.
7. Cox, J. C., và S. A. Ross, "The valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 145-66.
8. Smith, C. W., "Option Pricing: A Review", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 3-54.
9. Geske, R., "Comments on Whaley's Note", *Journal of Financial Economics*, 9 (tháng 6/1981), 213-15.
10. Geske, R., "Analytic Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5 (1977), 251-58.
11. Whaley, R., "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9 (1981), 207-11
12. Fama, E. E., "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38 (tháng 1/1965), 34-105.
13. French, K. R., "Stock Returns and the Weekend Effect", *Journal of Financial Economics*, 8 (tháng 3/1980), 55-69.
14. French, K. R., và R. Roll, "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics*, 17 (tháng 9/1986), 5-26.