

1. Định lý ERGODIC

Cho (X_n) là xích Markov có không gian trạng thái $E = \{1, 2, \dots, N\}$ và ma trận xác suất chuyển $P = (p_{ij})$.

Xích Markov có tính chất Ergodic theo nghĩa: tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ không phụ thuộc i sao cho:

$$\pi_j > 0; \forall j \in E \text{ và } \sum_{j \in E} \pi_j = 1$$

a) Định lý:

(i) Nếu P chính qui theo nghĩa tồn tại n_0 sao cho:

$$\min_{ij} p_{ij}^{(n_0)} > 0 \quad (1)$$

thì tồn tại các số $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N$ sao cho:

$$\pi_j > 0, \sum_{j \in E} \pi_j = 1 \quad (2)$$

và với mỗi $j \in E$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad (3)$$

(ii) Ngược lại, nếu tồn tại các số $\pi_1, \dots, \pi_N$ thỏa (2) và

(3) thì sẽ tồn tại n_0 thỏa (1)

(iii) Các số $\pi_1, \dots, \pi_N$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$x_j = \sum_{k \in E} x_k P_{kj}, j \in E \quad (4)$$

và đó là nghiệm duy nhất thỏa:

$$x_j \geq 0, \forall j \in E \text{ và } \sum_{j \in E} x_j = 1 \text{ nếu (1) xảy ra.}$$

b) Phân phối dừng:

Nghiệm không âm $(\pi_1, \dots, \pi_N)$ của hệ (4) sao cho $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$

được gọi là phân phối dừng hay bất biến của Xích Markov tức là, nếu $(\pi_1, \dots, \pi_N)$ là phân phối ban đầu của Xích Markov

nghĩa là $\pi_j = P(X_0 = j)$ Với $j = 1, 2, \dots, N$.

$$\text{thì } \pi_j^{(1)} = P(X_1 = j) = \sum_{k \in E} \pi_k P_{kj} = \pi_j$$

Một cách tổng quát ta có:

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j) = \pi_j \text{ Tức là } X_0, X_1, X_n, \dots$$

Có cùng phân phối xác suất:

Phân phối đồng thời của $(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m})$ không phụ thuộc vào k với mọi m . Quá trình có tính chất như thế gọi là quá trình dừng. Viết dưới dạng ma trận, thì phân phối dừng là vectơ cột bất biến của ma trận, thì phân phối dừng là vectơ cột bất biến của ma trận chuyển vị P^t của P :

$$P^t \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix}$$

c) Phân phối giới hạn và phân phối Ergodic

- Xích Markov có phân phối giới hạn, nếu $\forall j=1, 2, \dots,$

N

tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ không phụ thuộc i thỏa mãn

$$\pi_j \geq 0, \sum_{j \in E} \pi_j = 1$$

Lúc đó gọi $(\pi_1, \dots, \pi_N)$ là phân phối giới hạn.

- Xích Markov có tính Ergodic, nếu $\forall j=1, \dots, N$

tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ không phụ thuộc i thỏa mãn

$$\pi_j > 0, \sum_{j \in E} \pi_j = 1$$

Lúc đó gọi $(\pi_1, \dots, \pi_N)$ là phân phối Ergodic.

Định lý: Nếu tồn tại phân phối giới hạn thì đó là phân phối dừng duy nhất.

Như vậy theo định lý Ergodic thì điều kiện

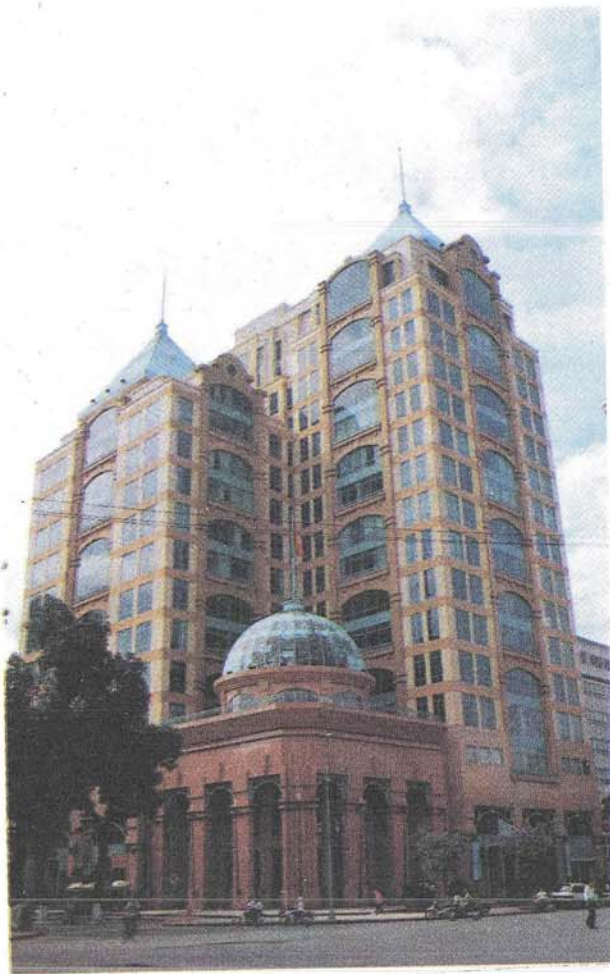
ĐỊNH LÝ ERGODIC VÀ MÔ HÌNH DI DÂN TỰ DO

Thạc sĩ NGUYỄN VĂN SĨ



Ảnh Hoàng Lâm

Ảnh Hoàng Lâm



$$P^3 = \begin{pmatrix} 1/6 & 7/24 & 3/8 & 1/12 & 1/12 \\ 7/24 & 1/6 & 3/8 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/4 & 1/4 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 7/24 & 3/8 & 1/12 & 1/12 \\ 7/24 & 1/6 & 3/8 & 1/12 & 1/12 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 5/16 & 5/24 & 5/16 & 1/8 & 1/24 \\ 1/4 & 13/48 & 5/16 & 1/8 & 1/24 \\ 5/24 & 1/4 & 3/8 & 1/12 & 1/12 \\ 5/16 & 5/24 & 5/16 & 1/8 & 1/24 \\ 1/4 & 13/48 & 5/16 & 1/8 & 1/24 \end{pmatrix}$$

Với P^4 thỏa mãn điều kiện (1) của định lý Ergodic, tức là P chính qui, như vậy tồn tại duy nhất phân phối dừng (cũng là phân phối giới hạn) ta tìm nghiệm không âm của hệ phương trình:

$$P^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Với $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ là tỷ lệ dân ở các địa điểm tương ứng.

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\min_{ij} p_{ij}^{(n)} > 0$ đảm bảo tồn tại duy nhất phân phối

dừng, đó là $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$

2. Mô hình di dân tự do

Ta xét sự di dân tự do của 10.000 người trong phạm vi 5 địa điểm (huyện) của một vùng dân cư, gồm các tỉnh liền nhau.

Giả sử số liệu thu thập được trong những năm qua (chu kỳ di dân được xét là 1 năm) ta có thể xây dựng mô hình xích Markov với:

- Không gian trạng thái $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Phân phối ban đầu: $\pi = (0,1; 0,2; 0,2; 0,2; 0,3)$
- Ma trận xác suất chuyển:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính trực tiếp ta có:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/6 & 1/4 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 5/12 & 1/4 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 0 & 1/6 \\ 5/12 & 1/6 & 1/4 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 5/12 & 1/4 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó:

$$\begin{cases} 1/2x_2 + 1/3x_3 + 1/2x_5 = x_1 \\ 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 + 1/2x_4 + 1/2x_5 = x_2 \\ 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 + 1/2x_4 + 1/2x_5 = x_3 \\ 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 + 1/2x_4 + 1/2x_5 = x_4 \\ 1/2x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 + 1/2x_4 + 1/2x_5 = x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$x_1 = \frac{14}{54}; x_2 = \frac{13}{54}; x_3 = \frac{1}{3}; x_4 = \frac{1}{9}; x_5 = \frac{1}{18}$$

Như vậy trong tương lai số dân di cư tự do trong 10.000 người sẽ ổn định cho 5 địa điểm tương ứng là:

- Địa điểm 1: 2.593 người
- Địa điểm 2: 2.407 người
- Địa điểm 3: 3.333 người
- Địa điểm 4: 1.111 người
- Địa điểm 5: 556 người

Ngoài ra ta có thể tính:

$$\pi^{(1)} = \pi \cdot P; \pi^{(2)} = \pi \cdot P^2; \pi^{(3)} = \pi \cdot P^3; \pi^{(4)} = \pi \cdot P^4 \text{ và: } \pi^{(5)} = \pi \cdot P^5 = (0,2573; 0,2386; 0,3375; 0,1083; 0,0583)$$

tức là sau 5 năm ($n = 5$) số dân cư tự do gần với số dân di cư đã tính ở trên

- Địa điểm 1: 2.573 người
- Địa điểm 2: 2.386 người
- Địa điểm 3: 3.375 người
- Địa điểm 4: 1.083 người
- Địa điểm 5: 583 người ■