



TS. BÙI PHÚC TRUNG\*

*Lý thuyết định giá tài sản trong thị trường tài chính là nền tảng cho việc nghiên cứu lý thuyết cũng như thực hành trong thị trường tài chính hiện nay. Trong các mô hình tài chính với thời gian rời rạc, nhiều chu kỳ thì mô hình cây nhị phân là mô hình đơn giản nhưng rất quan trọng trong việc trình bày các nguyên lý tài chính cơ bản và việc định giá quyền chọn dựa vào chứng khoán. Kỹ thuật rất phổ biến để định giá quyền chọn chứng khoán là kỹ thuật xây dựng cấu trúc cây nhị phân. Đây là đồ thị biểu diễn các hướng phát triển có thể khác nhau của giá chứng khoán trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn. Bài báo này giới thiệu mô hình cây nhị phân và một số nguyên lý tài chính quan trọng để định giá quyền chọn chứng khoán phái sinh.*

## 1. Giới thiệu chứng khoán phái sinh và toán tài chính

Khái niệm chứng khoán phái sinh (CKPS) hiện đang thâm nhập vào thị trường chứng khoán VN (TTCK). Một số công ty chứng khoán (CTCK) đang rất quan tâm đến sản phẩm này, các nhà đầu tư ngày càng tìm hiểu CKPS thông qua các TTCK phát triển trên thế giới. CKPS đã được đề cập đến trong Luật chứng khoán 2006 với khái niệm về quyền chọn và hợp đồng kỳ hạn. Năm 2010, Ủy ban Chứng khoán Nhà nước (UBCKNN) cũng đã bắt đầu thành lập tổ nghiên cứu chuyên về CKPS để sớm triển khai giao dịch CKPS tại VN.

CKPS được xem là một loại hàng hóa của thị trường tài chính, vì vậy cũng không nằm ngoài quy luật kinh tế hàng hóa. Một sản phẩm phải xuất phát từ nhu cầu của thị trường thì mới tồn tại được, đây chính là nhu cầu giao dịch của công chúng đầu tư. Khi giao dịch thì công cụ quan trọng nhất chính là mô hình toán học định giá CKPS.

Định nghĩa CKPS: Hợp đồng tài chính được xem là CKPS, hoặc khoản bồi thường ngẫu nhiên, nếu giá trị của nó ở ngày đáo hạn  $T$  được xác định chính xác bởi giá thị trường của công cụ tiền mặt cơ sở tại thời điểm  $T$  (Ingersoll, 1987).

Như vậy, tại thời điểm đáo hạn của hợp đồng CKPS, biểu thị bằng  $T$ , giá  $F(T)$  của tài sản phái sinh được hoàn toàn xác định bởi giá trị của “tài sản cơ sở”  $ST$ . Sau ngày đó chứng khoán ngừng tồn tại. Đặc trưng đơn giản này của tài sản phái sinh đóng vai trò rất quan trọng trong việc định giá chúng.

Toán tài chính ra đời năm 1900, năm mà Louis Bachelier (1870-1946) bảo vệ thành công luận án tiến sỹ với tên gọi “Lý thuyết đầu cơ tài chính” (Theory de Speculation) tại Đại học Sorbonne, Paris.

Năm 1953, Harry Markowitz và Jame Tobin đưa ra lý thuyết lựa chọn danh mục đầu tư.

Năm 1973, mô hình Black-Scholes về định giá các quyền chọn ra đời, mở ra một thời kỳ phát triển mạnh mẽ của toán tài chính.

Người ta đã thống kê được năm 1987, ở Mỹ mỗi ngày đã có 700 triệu hợp đồng quyền chọn trên 100 loại cổ phiếu được giao dịch. Trong lĩnh vực toán tài chính đã có các nhà khoa học sau đây được giải Nobel Kinh tế:

- Năm 1990, Harry Markowitz, William Sharpe và Merton Miller.

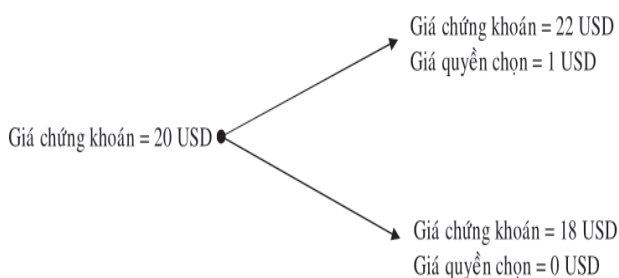
- Năm 1997, M.Scholes và Robert Merton.
- Năm 2003, Clive Grange.

Tại VN, toán tài chính được nghiên cứu trong khoảng 10 năm gần đây, nhưng số người nghiên cứu và quy mô quá nhỏ, tài liệu còn rất ít chưa đáp ứng yêu cầu hội nhập của nền kinh tế VN vào nền kinh tế thế giới.

Hiện nay trên cả nước, chỉ có hai trường Đại học Kinh tế Quốc dân và Đại học Kinh tế TP.HCM có đào tạo chuyên ngành toán tài chính với số lượng sinh viên mỗi năm khoảng 200 sinh viên. Số lượng sinh viên đã ra trường được hai khóa khoảng 400 sinh viên chưa đáp ứng được nhu cầu về nhân sự cho các công ty tài chính, chứng khoán, ngân hàng... Các thuật ngữ, các khái niệm, các nguyên lý toán tài chính cần được nghiên cứu trình bày một cách logic, chặt chẽ, có tính sư phạm cao để giúp cho các sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh dễ tiếp cận và nghiên cứu lĩnh vực mới mẻ và rất quan trọng này.

## 2. Mô hình cây nhị phân một bước

Chúng ta bắt đầu bằng cách giả định rằng chúng ta sẽ quan tâm định giá một quyền chọn mua kiểu châu Âu để mua một chứng khoán với giá 21 USD trong 3 tháng. Giá chứng khoán hiện tại là 20 USD. Chúng ta giả định đơn giản rằng tại thời điểm cuối của thời kỳ 3 tháng, giá chứng khoán là một trong hai giá trị: 22 USD hoặc 18 USD. Điều đó có nghĩa là quyền chọn sẽ có một trong hai giá trị tại cuối thời kỳ 3 tháng. Nếu giá chứng khoán tăng lên tới 22 USD, thì giá trị quyền chọn sẽ là 1 USD; nếu giá chứng khoán hạ còn 18 USD, thì giá trị quyền chọn sẽ là 0. Tình huống này được minh họa ở Hình 1.



**Hình 1. Những biến động của giá chứng khoán trong ví dụ bằng số**

Việc sử dụng sự thay đổi giá chứng khoán là căn cứ tốt nhất để định giá quyền chọn trong hoàn cảnh này. Yêu cầu duy nhất của giả định là không tồn tại các cơ hội cơ lợi. Chúng ta đưa ra một danh

mục đầu tư bao gồm chứng khoán và quyền chọn mà không chắc chắn về giá trị của danh mục đầu tư đó tại cuối thời kỳ 3 tháng. Sau đó, chúng ta cho rằng, bởi vì danh mục đầu tư không có rủi ro, cho nên lãi suất kiếm được phải bằng với lãi suất phi rủi ro. Điều này cho phép chúng ta có thể tính được chi phí của việc tạo ra danh mục đầu tư và sau đó tính được giá của quyền chọn. Bởi vì có hai đối tượng chứng khoán (chứng khoán và quyền chọn chứng khoán) và chỉ có hai kết quả có thể xảy ra, cho nên luôn tạo ra được danh mục đầu tư không rủi ro.

Xem xét một danh mục đầu tư bao gồm một vị thế mua  $\Delta$  cổ phiếu của chứng khoán, đó và một vị thế bán trong một quyền chọn mua. Chúng ta tính toán giá trị của  $\Delta$  sao cho danh mục đầu tư không có rủi ro. Nếu giá chứng khoán tăng từ 20 USD lên 22 USD, thì giá trị cổ phiếu là  $22\Delta$  và giá trị của quyền chọn là 1, vì thế tổng giá trị của danh mục đầu tư là  $22\Delta - 1$ . Nếu giá chứng khoán giảm từ 20 USD xuống 18 USD, thì giá trị cổ phiếu là  $18\Delta$  và giá trị quyền chọn là 0, vì thế tổng giá trị danh mục đầu tư là  $18\Delta$ . Danh mục đầu tư không có rủi ro nếu giá trị  $\Delta$  được lựa chọn sao cho giá trị cuối cùng của danh mục đầu tư tương tự nhau trong cả hai trường hợp. Điều này có nghĩa là:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta \text{ hay } \Delta = 0,25$$

Do đó, một danh mục đầu tư phi rủi ro là:

Vị thế mua: 0,25 cổ phiếu

Vị thế bán: 1 quyền chọn

Nếu giá chứng khoán tăng lên tới 22 USD, thì giá trị của danh mục đầu tư là:  $22 \times 0,25 - 1 = 4,5$

Nếu giá chứng khoán giảm xuống còn 18 USD, thì giá trị của danh mục đầu tư là:  $18 \times 0,25 = 4,5$

Bất kể giá chứng khoán có tăng lên hay giảm xuống, thì giá trị của danh mục đầu tư luôn luôn là 4,5 vào cuối thời kỳ tồn tại của quyền chọn.

Nếu không có các cơ hội cơ lợi, thì danh mục đầu tư phi rủi ro ắt hẳn phải chịu lãi suất phi rủi ro. Giả sử rằng trong trường hợp này lãi suất phi rủi ro là 12%/năm. Cho nên, giá trị danh mục đầu tư ngày hôm nay phải bằng với giá trị hiện tại của 4,5, hay:  $4,5e^{-0,12 \times 3/12} = 4,367$

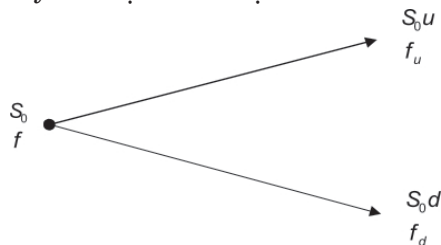
Giá trị của giá chứng khoán ngày hôm nay được biết là 20 USD. Giả sử giá quyền chọn được ký hiệu là  $f$ . Giá trị của danh mục đầu tư ngày hôm nay là:  $20 \times 0,25 - f = 5 - f$

Kết quả là  $5 - f = 4,367$  hay  $f = 0,633$

Điều đó cho thấy rằng trong điều kiện không có cơ hội cơ lợi, thì giá trị hiện tại của quyền chọn phải là 0,633. Nếu giá trị của quyền chọn lớn hơn 0,633, thì danh mục đầu tư sẽ cần chi phí ít hơn 4,367 để tạo ra nó và thu về nhiều hơn lãi suất phi rủi ro. Nếu giá trị của quyền chọn nhỏ hơn 0,633, thì việc bán danh mục đầu tư có thể cung cấp khoản tiền vay tại mức nhỏ hơn lãi suất phi rủi ro.

### Tổng quát

Chúng ta có thể tổng quát hóa vấn đề vừa được trình bày bằng cách xem xét một loại chứng khoán có giá là  $S_0$  và một quyền chọn trên chứng khoán đó có giá hiện hành là  $f$ . Chúng ta giả sử rằng quyền chọn này kéo dài trong khoảng thời gian  $T$  và trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn thì giá chứng khoán có thể dịch chuyển tăng từ  $S_0$  lên một mức giá mới là  $S_0u$  hoặc giảm từ  $S_0$  xuống một mức giá mới là  $S_0d$ , trong đó  $u > 1$  và  $d < 1$ . Tỷ lệ tăng của giá chứng khoán khi có một biến động tăng là  $u-1$ ; tỷ lệ giảm của giá chứng khoán khi có một biến động giảm là  $1-d$ . Nếu giá chứng khoán dịch chuyển tăng lên  $S_0u$ , thì chúng ta giả sử rằng phần thưởng thu được từ quyền chọn là  $f_u$ . Nếu giá chứng khoán dịch chuyển giảm xuống  $S_0d$ , thì chúng ta giả sử rằng phần thưởng thu được từ quyền chọn là  $f_d$ . Tình huống này sẽ được minh họa ở Hình 2.



**Hình 2. Các mức giá chứng khoán và giá quyền chọn trong cây nhị phân một bước tổng quát**

Như phần trước, chúng ta giả sử có một danh mục đầu tư bao gồm một vị thế mua  $\Delta$  cổ phiếu và một vị thế bán trong một quyền chọn. Chúng ta sẽ tính giá trị của  $\Delta$  sao cho danh mục đầu tư sẽ không có rủi ro. Nếu giá chứng khoán tăng, thì giá trị của danh mục đầu tư khi kết thúc thời kỳ tồn tại của quyền chọn là:  $S_0u\Delta - f_u$

Nếu giá chứng khoán giảm, thì giá trị của danh mục đầu tư khi kết thúc thời kỳ tồn tại của quyền chọn là:  $S_0d\Delta - f_d$

Hai giá trị này bằng nhau khi:  $S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$

$$\text{hay } \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (1)$$

Trong trường hợp này, danh mục đầu tư sẽ không có rủi ro và chắc hẳn sẽ đạt được lãi suất phi rủi ro. Phương trình (1) cho thấy rằng  $\Delta$  là tỷ lệ giữa thay đổi giá của quyền chọn trên thay đổi giá của chứng khoán khi chúng ta di chuyển giữa các nút.

Nếu chúng ta ký hiệu lãi suất phi rủi ro là  $r$ , thì giá trị hiện tại của danh mục đầu tư sẽ là:

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Chi phí để thành lập danh mục đầu tư là:

$$S_0\Delta - f$$

$$\text{Do đó: } S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

$$\text{hay } f = S_0\Delta - (S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Thay  $\Delta$  từ phương trình (1) vào và đơn giản hóa phương trình này, ta được:  $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$  (2)

$$\text{trong đó } p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad (3)$$

Phương trình (2) và (3) cho phép định giá một quyền chọn bằng cách sử dụng mô hình cây nhị phân một bước.

Trong thí dụ bằng số ở trên (Hình 1) thì  $u=1,1$ ;  $d=0,9$ ;  $r=0,12$ ;  $T=0,25$ ;  $f_u=1$ ;  $f_d=0$ . Từ phương trình (3), ta có:

$$p = \frac{e^{0,12 \times 0,25} - 0,9}{1,1 - 0,9} = 0,6523$$

và từ phương trình (2), thì:

$$f = e^{-0,12 \times 0,25} (0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0) = 0,633$$

là một kết quả giống với câu trả lời ở phần đầu nội dung này.

### 3. Nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa

Mặc dù chúng ta không cần đưa ra bất cứ giá định nào về xác suất của những biến động tăng hay giảm khi áp dụng phương trình (2), nhưng việc diễn giải biến  $p$  trong phương trình (3) dưới dạng xác suất tăng giá chứng khoán là điều bình thường. Do vậy,  $1-p$  là xác suất giảm giá chứng khoán, và biểu thức:  $pf_u + (1-p)f_d$  là phần thưởng kỳ vọng thu được từ quyền chọn. Với cách diễn giải này của  $p$  do đó phương trình (2) biểu thị rằng giá trị của quyền chọn vào ngày hôm nay là giá trị kỳ vọng trong tương lai được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro.

Bây giờ chúng ta khảo sát lãi suất kỳ vọng trên chứng khoán khi xác suất tăng giá được giả định bằng  $p$ . Giá chứng khoán kỳ vọng  $E(S_T)$  tại thời điểm  $T$  được cho như sau:

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

$$\text{hoặc } E(S_T) = pS_0(u-d) + S_0d$$

Thay thế  $p$  từ phương trình (3) vào, chúng ta được:  $E(S_T) = S_0 e^{rT}$  (4)

Điều đó cho thấy giá chứng khoán tăng trung bình theo mức lãi suất phi rủi ro. Do đó, việc xác định xác suất tăng giá bằng  $p$  cũng tương đương với việc giả định rằng lãi suất trên chứng khoán bằng với mức lãi suất phi rủi ro.

Trong môi trường rủi ro trung hòa, mọi cá nhân đều không quan tâm đến rủi ro. Trong môi trường như vậy, các nhà đầu tư không cần bù đắp cho phần rủi ro, và kỳ vọng trên tất cả các chứng khoán đều là lãi suất phi rủi ro. Phương trình (4) cho thấy rằng chúng ta giả định môi trường có rủi ro trung hòa khi chúng ta cho xác suất tăng giá bằng  $p$ . Phương trình (2) cho thấy giá trị của quyền chọn là phần thưởng kỳ vọng của nó trong môi trường rủi ro trung hòa được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro.

Kết quả này là ví dụ về một nguyên tắc tổng quát quan trọng trong việc định giá quyền chọn đã được biết dưới dạng nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa (Risk-Neutral Valuation). Nguyên tắc này phát biểu rằng chúng ta có thể giả định môi trường có rủi ro trung hòa khi định giá một quyền chọn. Mức giá mà chúng ta tìm được không chỉ chính xác trong môi trường rủi ro trung hòa mà còn chính xác trong môi trường thực.

### **Ví dụ về mô hình nhị phân một bước:**

Bây giờ chúng ta trở lại thí dụ ở Hình 1 và làm sáng tỏ rằng nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa sẽ đem lại cùng kết quả như những lý luận về không có cơ lợi. Trong Hình 1, giá chứng khoán hiện hành là 20 USD và sẽ dịch chuyển tăng lên 22 USD hoặc giảm xuống 18 USD vào cuối kỳ hạn 3 tháng. Quyền chọn được xem xét là quyền chọn mua kiểu châu Âu với giá thực hiện là 21 USD và thời gian đáo hạn là 3 tháng. Lãi suất phi rủi ro là 12%/năm

Chúng ta định nghĩa  $p$  là xác suất tăng giá chứng khoán trong môi trường rủi ro trung hòa. Chúng ta có thể tính  $p$  từ phương trình (3). Hoặc là, chúng ta có thể biện luận rằng kỳ vọng trên chứng khoán trong môi trường rủi ro trung hòa bằng với lãi suất phi rủi ro là 12%. Điều này có nghĩa là  $p$  phải thỏa phương trình:

$$22p + 18(1-p) = 20e^{0,12 \times 3/12} \text{ hoặc } 4p = 20e^{0,12 \times 3/12} - 18$$

Nghĩa là  $p$  phải bằng 0,6532

Vào cuối thời kỳ 3 tháng, quyền chọn mua này nhận giá trị bằng 1 với xác suất là 0,6523 và nhận

giá trị 0 với xác suất là 0,3477. Do đó, giá trị kỳ vọng của nó sẽ bằng:  $0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0 = 0,6523$

Trong môi trường rủi ro trung hòa, giá trị này sẽ được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro. Do đó, giá trị của quyền chọn vào ngày hôm nay là:  $0,6523e^{-0,12 \times 3/12}$  hay 0,633 USD. Giá trị này giống như giá trị đã xác định trong phần trước, nó chứng minh rằng định giá trong điều kiện không có cơ lợi và định giá theo rủi ro trung hòa sẽ cho kết quả như nhau.

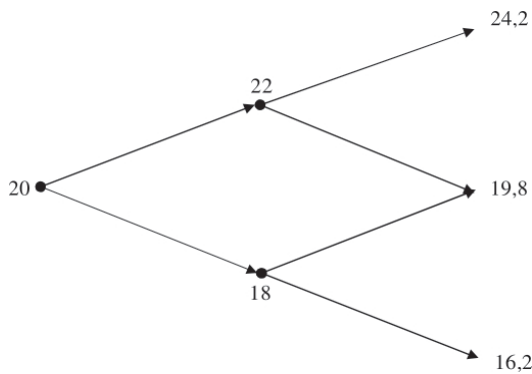
### **Môi trường thực và môi trường rủi ro trung hòa.**

Nên nhấn mạnh rằng  $p$  là xác suất của một biến động tăng trong môi trường rủi ro trung hòa. Nhìn chung, xác suất này không giống như xác suất của một biến động tăng trong môi trường thực tế. Trong ví dụ của chúng ta:  $p = 0,6523$ . Khi xác suất của một biến động tăng là 0,6523 thì kỳ vọng trên chứng khoán là lãi suất phi rủi ro 12%. Giả sử rằng trong môi trường thực, kỳ vọng trên chứng khoán là 16% và  $q$  là xác suất của biến động tăng trong môi trường thực. Do đó:  $22q + 18(1-q) = 20e^{0,16 \times 3/12}$  cho nên  $q = 0,7041$ .

Trong trường hợp đó, phần thưởng kỳ vọng thu được từ quyền chọn trong môi trường thực là:  $p \times 1 + (1-p) \times 0$ . Phần thưởng này là 0,7041. Thật không may mắn khi mà không dễ để biết được chính xác tỷ lệ chiết khấu được áp dụng cho phần thưởng kỳ vọng trong môi trường thực. Một vị thế trong một quyền chọn mua thì mang nhiều rủi ro hơn một vị thế trên chứng khoán. Do đó, tỷ lệ chiết khấu được áp dụng cho phần thưởng thu được từ một quyền chọn mua sẽ lớn hơn 16%. Nếu không biết giá trị của quyền chọn, thì chúng ta sẽ không biết nó nên lớn hơn bao nhiêu so với tỷ lệ 16%. Nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa sẽ giải quyết vấn đề này. Chúng ta biết rằng trong một môi trường rủi ro trung hòa thì kỳ vọng trên tất cả các tài sản (và do đó, tỷ lệ chiết khấu sử dụng cho tất cả các phần thưởng kỳ vọng) là lãi suất phi rủi ro.

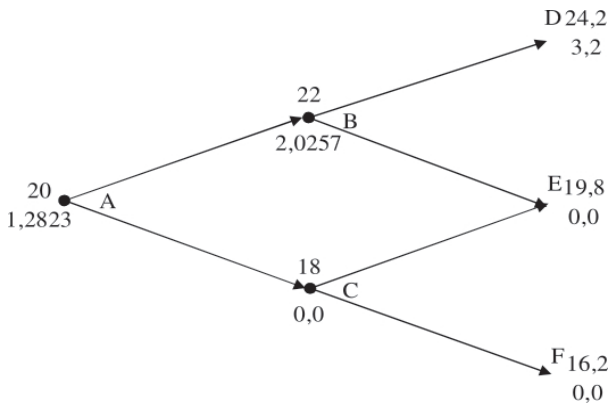
### **4. Mô hình cây nhị phân hai bước**

Chúng ta có thể mở rộng để phân tích thành mô hình cây nhị phân 2 bước như trong Hình 3. Ở đây giá chứng khoán là 20 USD và cứ trong mỗi bước có thể tăng lên 10% hoặc giảm xuống 10%. Chúng ta giả sử rằng mỗi bước dài 3 tháng và lãi suất phi rủi ro là 12%/năm. Như ở phần trước, chúng ta sẽ xem xét một quyền chọn với giá thực hiện là 21 USD.



**Hình 3. Giá chứng khoán trong cây nhị phân hai bước**

Mục tiêu phân tích là để tính giá quyền chọn tại nút đầu tiên của cây. Điều này có thể thực hiện được bằng cách áp dụng lại các nguyên tắc ở trên. Hình 4 trình bày một cây tương tự như Hình 3, nhưng ở mỗi nút có cả hai mức giá chứng khoán và giá quyền chọn (số trên là giá chứng khoán và số dưới là giá quyền chọn). Giá quyền chọn ở các nút cuối cùng của cây có thể được tính một cách dễ dàng. Chúng là các phần thưởng thu được từ quyền chọn. Ở nút D, giá chứng khoán là 24,2 USD và giá quyền chọn là  $24,2 - 21 = 3,2$ ; tại nút E và F, quyền chọn thuộc vùng lỗ nên giá trị của nó là 0.

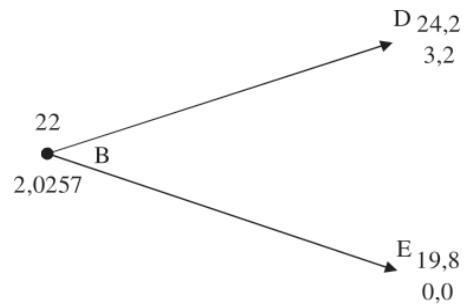


**Hình 4. Giá chứng khoán và giá quyền chọn trong cây nhị phân hai bước.**

Trong đó, tại mỗi nút, số ở trên là giá chứng khoán; số ở dưới là giá quyền chọn.

Tại nút C, giá quyền chọn là 0, bởi vì nút C dẫn đến nút E hoặc nút F và tại cả hai nút này giá quyền chọn đều bằng 0. Chúng ta tính giá quyền chọn tại nút B bằng cách tập trung vào một nhánh cây được tách ra trong Hình 5. Sử dụng ký hiệu được quy ước ở đầu bài báo  $u=1,1$ ;  $d=0,9$ ;  $r=1,12$ ; và  $T=0,25$  cho nên  $p=0,6523$ , và phương trình (2) cho giá trị quyền chọn tại nút B như sau:

$$e^{-0,12 \times 3/12}(0,6523 \times 3,2 + 0,3477 \times 0) = 2,0257$$

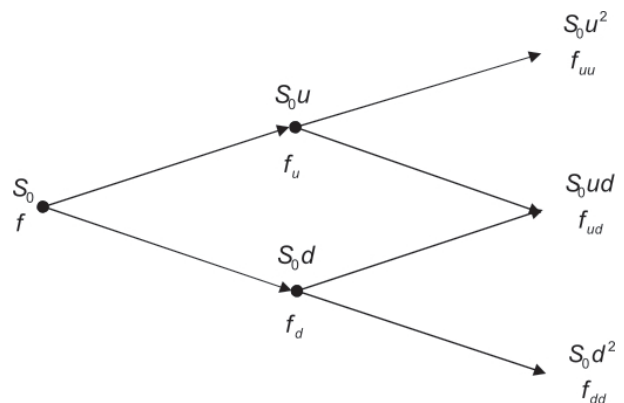


**Hình 5. Định giá quyền chọn tại nút B**

Vấn đề còn lại là tính giá quyền chọn tại nút đầu tiên A. Chúng ta sẽ tính bằng cách tập trung vào bước thứ nhất của cây. Chúng ta biết rằng giá trị của quyền chọn tại nút B là 2,0257 và tại nút C là 0. Do đó, phương trình (2) cho giá trị tại nút A là:  $e^{-0,12 \times 3/12}(0,6523 \times 2,0257 + 0,3477 \times 0) = 1,2823$ . Giá trị của quyền chọn là 1,2823 USD.

Lưu ý rằng ví dụ này được xây dựng sao cho  $u$  và  $d$  (tỷ lệ tăng và giảm) giống nhau tại mỗi nút của cây và sao cho thời gian của các bước dài như nhau. Do đó, xác suất rủi ro trung hòa  $p$  được tính bằng phương trình (3) tại mỗi nút đều tương tự nhau.

## Tổng quát



**Hình 6. Các mức giá chứng khoán và giá quyền chọn trong một cây nhị phân tổng quát**

Chúng ta có thể tổng quát hóa trường hợp cây nhị phân hai bước bằng cách xem xét tình huống như trong Hình 6. Giá chứng khoán ban đầu là  $S_0$ . Qua mỗi bước thời gian, mức giá này sẽ dịch chuyển tăng  $u$  lần so với giá trị ban đầu của nó hoặc dịch chuyển giảm  $d$  lần so với giá trị ban đầu của nó. Ký hiệu cho giá trị của quyền chọn được thể hiện trên cây nhị phân (ví dụ, sau 2 biến động tăng, thì giá trị của quyền chọn là  $f_{uu}$ ). Chúng ta giả sử rằng lãi suất phi rủi ro là  $r$  và độ dài của

mỗi bước thời gian là  $\delta t$  năm. Áp dụng nhiều lần phương trình (2), ta được:

$$f_u = e^{-r\delta t} [pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \quad (5)$$

$$f_d = e^{-r\delta t} [pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \quad (6)$$

$$f = e^{-r\delta t} [pf_u + (1-p)f_d] \quad (7)$$

Thay thế phương trình (5) và (6) vào (7), chúng ta được:

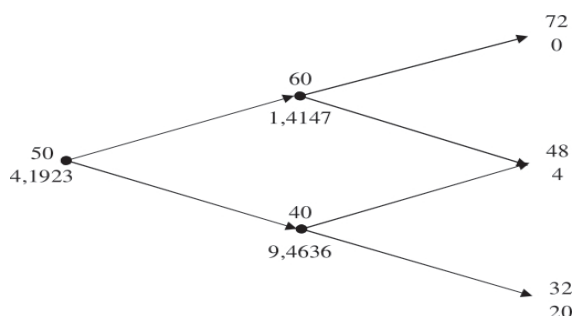
$$f = e^{-2r\delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \quad (8)$$

Kết quả này không thay đổi theo nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa đã đề cập ở trên. Các biến  $p^2$ ,  $2p(1-p)$ , và  $(1-p)^2$  là các xác suất của các nút cuối cùng ở trên, ở giữa, và ở dưới. Giá quyền chọn bằng với phần thưởng kỳ vọng của nó trong môi trường rủi ro trung hòa được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro.

Khi chúng ta bổ sung nhiều bước hơn vào cây nhị phân, thì nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa tiếp tục được duy trì. Giá quyền chọn luôn bằng với phần thưởng kỳ vọng của nó trong môi trường rủi ro trung hòa, được chiết khấu tại mức lãi suất phi rủi ro.

## 5. Ví dụ về quyền chọn bán

Các thủ tục mô tả trong chương này có thể được sử dụng để định giá bất cứ phái sinh nào phụ thuộc vào chứng khoán mà sự thay đổi giá của nó biến đổi theo cấu trúc cây nhị phân. Hãy xem xét một quyền chọn bán kiểu châu Âu thời hạn hai năm với giá thực hiện là 52 USD trên chứng khoán có giá hiện hành là 50 USD. Chúng ta giả sử rằng có hai bước thời gian trong một năm và trong mỗi bước giá chứng khoán hoặc tăng hoặc giảm 20%. Chúng ta cũng giả sử rằng lãi suất phi rủi ro là 5%.



**Hình 7. Sử dụng cây nhị phân hai bước để định giá quyền chọn bán kiểu châu Âu. Tại mỗi nút, số ở trên là giá chứng khoán và số ở dưới là giá quyền chọn**

Cây nhị phân được trình bày trong Hình 7. Giá trị  $p$  của xác suất rủi ro trung hòa được cho như sau:

$$p = \frac{e^{0,05 \times 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

Các mức giá chứng khoán cuối cùng có thể là 72 USD, 48 USD và 32 USD. Trong trường hợp này, thì  $f_{uu}=0$ ,  $f_{ud}=4$  và  $f_{dd}=20$ . Từ phương trình (8), thì:

$$f = e^{-2 \times 0,05 \times 1} (0,6282^2 \times 0 + 2 \times 0,6282 \times 0,3718 \times 4 + 0,3718^2 \times 20) = 4,1923$$

Giá trị của quyền chọn bán là 4,1923 USD. Kết quả này cũng có thể được tính bằng cách sử dụng phương trình (2) và tính ngược chiều cây một bước tại mỗi thời điểm. Hình 7 cho thấy các mức giá quyền chọn trung gian đã tính được.

## 6. Ước lượng Delta

Giai đoạn này rất thích hợp để thảo luận về delta, một tham số quan trọng trong việc định giá và bảo hộ các quyền chọn.

Delta của một quyền chọn chứng khoán là tỷ lệ giữa thay đổi giá của quyền chọn chứng khoán trên thay đổi giá của chứng khoán cơ sở. Nó là số đơn vị chứng khoán mà chúng ta nên giữ cho mỗi quyền chọn bán để bảo hộ phi rủi ro. Nó tương tự như  $\Delta$  đã giới thiệu trong phần đầu. Cấu trúc của một bảo hộ phi rủi ro đôi khi được gọi là chiến lược bảo hộ delta. Delta của quyền chọn mua là số dương, trong khi delta của quyền chọn bán là số âm.

Từ Hình 1, chúng ta có thể tính giá trị delta của quyền chọn mua đang được xem xét bằng cách:

$$\frac{1 - 0}{22 - 18} = 0,25$$

Kết quả này là do khi giá chứng khoán thay đổi từ 18 USD tới 22 USD, thì giá quyền chọn thay đổi từ 0 USD tới 1 USD.

Trong Hình 4, delta tương ứng với những biến động giá chứng khoán sau bước thời gian thứ nhất bằng:

$$\frac{2,0257 - 0}{22 - 18} = 0,5064$$

Delta tương ứng với những biến động giá chứng khoán sau bước thời gian thứ 2 bằng:

$$\frac{3,2 - 0}{24,2 - 19,8} = 0,7273$$

nếu có biến động tăng sau bước thời gian thứ nhất và bằng:

$$\frac{0 - 0}{19,8 - 16,2} = 0$$

nếu có biến động giảm sau bước thời gian thứ nhất.

Từ Hình 7, delta bằng:

$$\frac{1,4147 - 9,4636}{60 - 40} = -0,4024$$

tại thời điểm cuối bước thời gian thứ nhất, và bằng:  $\frac{0-4}{72-48} = -0,1667$

hoặc bằng:  $\frac{4-20}{48-32} = -1,0000$

tại thời điểm cuối bước thời gian thứ hai.

Các ví dụ về cây nhị phân cho thấy rằng *delta* thay đổi theo thời gian: trong Hình 4, *delta* thay đổi từ 0,5064 đến 0,7273 hoặc đến 0; trong Hình 7, nó thay đổi từ -0,4024 đến -0,1667 hoặc đến -1,0000. Vì vậy, để duy trì bảo hộ phi rủi ro khi sử dụng quyền chọn và chứng khoán cơ sở, thì chúng ta cần điều chỉnh số chứng khoán nắm giữ theo định kỳ.

## 7. Sự tương ứng của $u$ và $d$ với độ bất bành

Trong thực tiễn, khi xây dựng mô hình cây nhị phân để mô tả những biến động của giá chứng khoán, thì chúng ta lựa chọn tham số  $u$  và  $d$  để phù hợp với độ bất bành của giá chứng khoán. Để xem xét quá trình thực hiện, chúng ta giả sử rằng kỳ vọng trên chứng khoán (trong môi trường thực) là  $\mu$  và độ bất bành của nó là  $\sigma$ . Hình 8a thể hiện những biến động giá chứng khoán qua bước một của cây nhị phân. Bước này có độ dài là  $\delta t$ . Giá chứng khoán tăng lên tương ứng với  $u$  hoặc giảm xuống tương ứng với  $d$ . Xác suất của một biến động tăng (trong môi trường thực) được giả định là  $q$ .

Giá chứng khoán kỳ vọng tại thời điểm cuối bước 1 sẽ là  $S_0 e^{\mu \delta t}$ . Trên cây nhị phân, giá chứng khoán kỳ vọng tại thời điểm này là:  $qS_0 u + (1-q)S_0 d$

Do đó, để làm cho những tham số của cây phù hợp với kỳ vọng trên chứng khoán, thì chúng ta phải có:  $qS_0 u + (1-q)S_0 d = S_0 e^{\mu \delta t}$

$$\text{Hay } q = \frac{e^{\mu \delta t} - d}{u - d} \quad (9)$$

Độ bất bành  $\sigma$  của giá chứng khoán được xác định sao cho  $\sigma \sqrt{\delta t}$  là độ lệch chuẩn của kỳ vọng trên giá chứng khoán trong một khoảng thời gian ngắn có độ dài là  $\delta t$ . Tương đương, phương sai của kỳ vọng trên giá chứng khoán là  $\sigma^2 \delta t$ . Trên cây nhị phân ở Hình 8a, phương sai của kỳ vọng trên giá chứng khoán là:

$$qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2$$

Do đó, để làm cho những tham số của cây phù hợp với độ bất bành của giá chứng khoán, chúng ta phải có:  $qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2 = \sigma^2 \delta t$  (10)

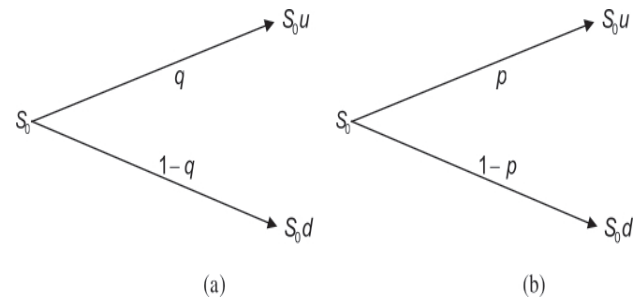
Thay phương trình (9) vào phương trình (10), chúng ta được:  $e^{\mu \delta t}(u+d) - ud - e^{2\mu \delta t} = \sigma^2 \delta t$

Khi các số hạng và các lũy thừa bậc cao hơn của phương trình trên được bỏ qua, thì nghiệm của phương trình này là:

$$u = e^{\sigma \sqrt{\delta t}} \quad (11)$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\delta t}} \quad (12)$$

Các giá trị của  $u$  và  $d$  này được đề xuất bởi Cox, Ross, và Rubinstein (1979) để tìm ra  $u$  và  $d$  phù hợp.



**Hình 8. Thay đổi giá chứng khoán trong thời gian  $\delta t$  ở (a) môi trường thực và (b) môi trường rủi ro trung hòa.**

Kết quả phân tích trong phần này cho thấy rằng chúng ta có thể thay thế cây trong Hình 8a bằng cây trong Hình 8b, trong đó xác suất của một biến động tăng là  $p$ , và sau đó thực hiện như trong trường hợp môi trường đó là môi trường rủi ro trung hòa. Biến  $p$  đã được đưa ra bởi phương trình (3) là:

$$p = \frac{e^{r \delta t} - d}{u - d}$$

Đó là xác suất rủi ro trung hòa của một biến động tăng. Ở Hình 8b, giá chứng khoán kỳ vọng tại thời điểm cuối bước thời gian là  $S_0 e^{r \delta t}$  như đã được trình bày trong phương trình (4). Phương sai của kỳ vọng trên giá chứng khoán là:

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = e^{r \delta t}(u+d) - ud - e^{2r \delta t}$$

Thay  $u$  và  $d$  từ phương trình (11) và (12) vào, ta thấy biểu thức này bằng  $\sigma^2 \delta t$  khi các số hạng trong  $\delta t^2$  và các lũy thừa bậc cao hơn của  $\delta t$  được bỏ qua.

Kết quả phân tích ở trên cho thấy rằng khi chúng ta dịch chuyển từ môi trường thực tế sang môi trường rủi ro trung hòa thì kỳ vọng thay đổi, nhưng độ bất bành của nó vẫn giữ nguyên (ít nhất là trong giới hạn khi  $\delta t$  có xu hướng tiến đến 0). Đây một minh họa cho kết quả chung quan trọng được biết dưới dạng định lý Girsanov. Khi chúng ta dịch chuyển từ một môi trường với một bộ bao gồm những ưu tiên về rủi ro này sang môi trường với một bộ của những ưu tiên rủi ro khác, thì các tỷ lệ tăng trưởng kỳ vọng của các biến thay đổi,

nhưng độ bất bình của chúng vẫn tương tự nhau. Thỉnh thoảng, sự dịch chuyển từ bộ các ưu tiên rủi ro này sang bộ các ưu tiên rủi ro khác được xem như là việc thay đổi thước đo.

## 8. Mô hình cây nhị phân trong thực tiễn

Các mô hình nhị phân đã trình bày ở trên còn rất đơn giản so với thực tế. Rõ ràng, nhà phân tích chỉ có thể mong đạt được kết quả xấp xỉ trong việc định giá quyền chọn bằng cách giả định rằng những biến động của giá chứng khoán trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn sẽ bao gồm một hoặc hai bước nhị phân.

Khi sử dụng cây nhị phân trong thực tế, thời kỳ tồn tại của quyền chọn thường được chia thành từ 30 bước trở lên có độ dài là  $\delta t$ . Trong mỗi bước đều có sự biến động giá chứng khoán nhị phân. Với 30 bước thời gian, điều này có nghĩa là có 31 mức giá chứng khoán cuối cùng và 230, hoặc khoảng 1 tỷ mức giá chứng khoán khả dĩ có thể xem xét.

Các tham số  $u$  và  $d$  được lựa chọn để phù hợp với độ bất bình  $\sigma$  của giá chứng khoán. Một cách phổ biến để làm điều này là thiết lập:

$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$  và  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$  như đã được xác định ở phần trước. Sau đó, một hệ phương trình hoàn chỉnh để xác định cây nhị phân như sau:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$$

Phần mềm DerivaGem cho phép định giá các quyền chọn trong khoảng từ 2 đến 500 bước thời gian (thiết lập cho các kiểu quyền chọn là kiểu châu Âu nhị phân hay kiểu Mỹ nhị phân). Phần mềm này có thể hiển thị các cây nhị phân trong khoảng 10 bước thời gian.

## 9. Kết luận

Bài báo đã cung cấp một cái nhìn khái quát về định giá quyền chọn CKPS. Nếu sự biến động giá chứng khoán trong suốt thời kỳ tồn tại của quyền chọn bị chi phối bởi mô hình cây nhị phân một bước, thì có thể lập được danh mục đầu tư phi rủi ro quyền chọn chứng khoán. Trong môi trường không có các cơ hội cơ lợi, các danh mục đầu tư phải có lãi suất bằng với lãi suất phi rủi ro. Điều kiện này cho phép quyền chọn chứng khoán được định giá theo chứng khoán. Thật đáng quan tâm khi lưu ý rằng không cần có giả định về xác suất tăng hoặc giảm giá chứng khoán tại mỗi nút của cây nhị phân.

Khi những biến động giá chứng khoán bị chi

phối bởi mô hình cây nhị phân nhiều bước, chúng ta có thể xem xét riêng biệt từng bước nhị phân và tính ngược từ cuối thời kỳ tồn tại trở về điểm ban đầu để tìm giá trị hiện tại của quyền chọn. Một lần nữa chỉ có lý luận về môi trường không có cơ hội cơ lợi được sử dụng, và không cần có giả định về xác suất tăng hoặc giảm giá chứng khoán tại mỗi nút của cây nhị phân.

Một phương pháp khác để định giá quyền chọn chứng khoán có liên quan đến nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa. Nguyên tắc rất quan trọng này phát biểu rằng có thể chấp nhận việc giả định môi trường có rủi ro trung hòa khi định giá quyền chọn theo chứng khoán cơ sở. Thông qua các ví dụ bằng số và đại số học, bài báo này đã cho thấy những lý luận về môi trường không có cơ hội cơ lợi và nguyên tắc định giá rủi ro trung hòa là tương đương nhau và luôn dẫn đến các mức giá quyền chọn như nhau■

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cox, J., S. Ross & M. Rubinstein (10/1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7.
2. Rendlemam, R., và B. Bartter (1979), "Two State Option Pricing", *Journal of Finance*, 34.
3. Chance, D. M. (1998), *An Introduction to Derivatives*, phiên bản thứ 4, Dryden Press, Orlando, FL.
4. Cox, J. C. & M. Rubinstein (1985), *Option Markets*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
5. Kolb, R. (1999), *Futures, Options, and Swaps*, phiên bản thứ 3, Blackwell, Oxford.
6. McMillan, L. G. (1992), *Options as a Strategic Investment*, New York Institute of Finance, New York.
7. John C, Huul (2007), *Options, Futures and Others Derivatives*.