

BIẾN TẾ HÀM NGẪU NHIÊN VÀ BÀI TOÁN SẢN LƯỢNG ĐẦU RA CHO SẢN XUẤT

Thạc sĩ TRƯƠNG LÂM ĐÔNG

Bài toán: Một hãng sản xuất n-loại sản phẩm, biết:

1/ Hàm chi phí sản xuất:

$$C = C(q_1, q_2, \dots, q_n) = C(Q)$$

2/ Đơn giá các sản phẩm tương ứng là: $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Ở đây $C(Q)$ và p_i là các đại lượng ngẫu nhiên mà ta biết quy luật phân phối xác suất của chúng.

Cần tìm mức sản lượng đầu ra $\bar{Q} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n)$ để hãng đạt lợi nhuận lớn nhất. Trong việc nghiên cứu giải quyết bài toán này chúng tôi đã đạt được một số kết quả, vì khuôn khổ bài viết có hạn, nên chúng tôi chỉ trình bày tóm tắt các kết quả (về cơ sở lý thuyết để giải bài toán đã nêu) đã đạt được:

Ký hiệu: $M_i C(Q) = \frac{\partial C}{\partial q_i}$ trong kinh tế gọi là biên tế của

$C(Q)$ theo q_i

Các kết quả đạt được là:

1/ Kỳ vọng E thỏa:

$$M_i E[C(Q)] = E[M_i C(Q)] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2/ Nếu:

- Tồn tại hàm $\varphi(x) \geq 0$ trên R sao cho

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

- Tồn tại các hàm $\alpha(Q)$ và $\beta(Q) > 0$, là các hàm khả vi liên tục

- $C(Q)$ có hàm mật độ xác suất là:

$$f_Q(x) = \frac{1}{\beta(Q)} \cdot \varphi\left[\frac{x - \alpha(Q)}{\beta(Q)}\right]$$

Thì: a/ Đại lượng ngẫu nhiên $M_i C(Q)$ có hàm mật độ xác suất là:

$$g_{Q,i}(x) = \frac{1}{M_i \beta(Q)} \cdot \varphi\left[\frac{x - M_i \alpha(Q)}{M_i \beta(Q)}\right]$$

b/ Độ lệch chuẩn σ thỏa:

$$\sigma[M_i C(Q)] = |M_i| \sigma[C(Q)] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Từ cơ sở lý thuyết trên ta giải quyết được bài toán đã nêu. Để đỡ rườm rà trong việc viết, chúng tôi chỉ trình bày trong trường hợp hãng sản xuất 2 loại sản phẩm ($n = 2$)

Khi này mức sản lượng ngẫu nhiên: $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ cần tìm là nghiệm hệ của phương trình

$$M_i C(Q) = p_i \quad i = 1, 2 (\diamond)$$

Với giả thiết $C(Q)$ có quy luật phân phối chuẩn.

Gọi $p_1^0 = E(p_1), p_2^0 = E(p_2)$ và $Q^0 = (q_1^0, q_2^0)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$M_i E[C(Q)] = p_i^0 \quad i = 1, 2.$$

Giải hệ phương trình ($\diamond$), chúng tôi đã đạt được các kết quả sau:

$$1. E[C(Q)] = \alpha(Q)$$

$$2. E(\bar{Q}_1) = q_1^0, E(\bar{Q}_2) = q_2^0$$

$$3. \beta(Q) = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma[C(Q)]$$

$$4. \sigma(\hat{Q}_1) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \quad \sigma(\hat{Q}_2) = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Trong đó:

$$a_1^2 = \left[\frac{h \cdot M_1 \beta(Q^0) - c \cdot M_1 \beta(Q^0)}{ac - b^2} \right]^2;$$

$$a_2^2 = \left[\frac{h \cdot M_2 \beta(Q^0) - a \cdot M_2 \beta(Q^0)}{ac - b^2} \right]^2$$

$$b_1^2 = \frac{c \cdot \sigma^2(p_1) - b \sigma^2(p_2)}{ac - b^2}; \quad b_2^2 = \frac{a \cdot \sigma^2(p_2) - b \sigma^2(p_1)}{ac - b^2}$$

$$\text{với } a = \frac{\partial^2 \alpha(Q^0)}{\partial q_1^2}; \quad b = \frac{\partial^2 \alpha(Q^0)}{\partial q_1 \partial q_2}; \quad c = \frac{\partial^2 \alpha(Q^0)}{\partial q_2^2}$$

Ví dụ: giả sử qua thu thập và xử lý số liệu ta có:

$$1. E[C(Q)] = q_1^2 + 2q_2^2 - q_1 q_2$$

$$2. \beta(Q) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

$$3. E(p_1) = 6, \quad E(p_2) = 4, \quad \sigma^2(p_1) = 0.9, \quad \sigma^2(p_2) = 0.4$$

(sản lượng tính theo đơn vị: 1.000.000 sản phẩm, đơn giá tính theo đơn vị: 10.000đ)

Đầu tiên ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} M_1 E[C(Q)] = p_1^0 \\ M_2 E[C(Q)] = p_2^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2q_1 - q_2 = 6 \\ 4q_2 - q_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^0 = 4 \\ q_2^0 = 2 \end{cases}$$

Theo các công thức ở trên ta được:

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 4 \Rightarrow ac - b^2 = 7$$

$$a_1^2 = \frac{0.8}{49}; \quad a_2^2 = \frac{0.16}{49}; \quad b_1^2 = \frac{4}{7}; \quad b_2^2 = \frac{1.7}{7}$$

$$\Rightarrow \sigma(\bar{Q}_1) = 0.76, \quad \sigma(\bar{Q}_2) = 0.5$$

Từ giả thiết ta cũng được $\sigma(p_1) = 0.94, \sigma(p_2) = 0.63$

Ta có kết luận sau:

Khi: đơn giá P_1 dao động trong khoảng

$$(60.000 - 9.400; 60.000 + 9.400) = (50.600đ; 69.400đ)$$

và đơn giá P_2 dao động trong khoảng

$$(40.000 - 6.300; 40.000 + 6.300) = (33.700đ; 46.300đ)$$

Thì: Để đạt lợi nhuận lớn nhất (tương đối) hãng nên sản xuất:

- Lượng sản phẩm thứ nhất trong khoảng

$$(4 - 0.76; 4 + 0.76) = (3.24 \text{ triệu sản phẩm}; 4.76 \text{ triệu sản phẩm})$$

- Lượng sản phẩm thứ hai trong khoảng

$$(2 - 0.5; 2 + 0.5) = (1.5 \text{ triệu sản phẩm}; 2.5 \text{ triệu sản phẩm})$$

Tài liệu tham khảo

1. PGS - TS Lê Văn Hốt và Trương Lâm Đông, Một số đại lượng biên tế trong kinh tế, Báo cáo tại Hội nghị toàn quốc lần II về xác suất thống kê và ứng dụng, Hà Nội, 2001)

2. Trương Lâm Đông, Đại lượng biên duyên hàm ngẫu nhiên nhiều biến và ứng dụng, Luận án thạc sĩ, năm 1999.