

NHỮNG ĐẠI LƯỢNG BIÊN TẾ NGẪU NHIÊN

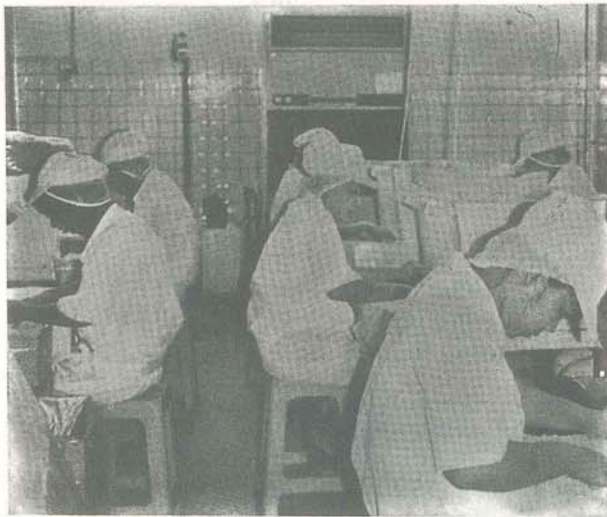
PTS. NGUYỄN VĂN PHÚC

I. MỞ ĐẦU

Thời gian gần đây rất nhiều tác giả đã sử dụng khái niệm *biên tế* và *trung bình* để nghiên cứu và phân tích các hiện tượng và hoạt động kinh tế.

Theo chỗ chúng tôi được biết, hầu hết các tác giả đều giả thiết các đại lượng kinh tế là các đại lượng xác định, phụ thuộc vào số lượng các sản phẩm q . Thế nhưng trong thực tế, các đại lượng kinh tế x (ví dụ như chi phí sản xuất, lợi nhuận, thu nhập...) lại phụ thuộc vào sản lượng q một cách ngẫu nhiên.

Thật vậy chẳng hạn như chi phí sản xuất phụ thuộc vào tình trạng máy móc, tình trạng công nhân, giá cả nguyên vật liệu... mà các đại lượng này đều là các đại lượng ngẫu nhiên.



Do đó việc định nghĩa đại lượng biên tế, đại lượng trung bình cho các đại lượng kinh tế x , khi x phụ thuộc ngẫu nhiên theo số lượng sản phẩm q là hết sức cần thiết.

Trong khi tính toán, cũng như khi rút ra những kết luận kinh tế chúng ta cũng phải luôn để ý đến tính ngẫu nhiên của các đại lượng trên.

Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi chưa xét sự phụ thuộc ngẫu nhiên của đại lượng x theo thời gian, mà chỉ xét sự phụ thuộc của x vào q trong một khoảng thời

gian tương đối ngắn và ổn định (thông thường là trong một chu kỳ sản xuất).

Với giả thiết đó ta có thể xét sự phụ thuộc của x vào q tại một thời điểm nào đó. Với giả thiết như vậy, thì sự phụ thuộc của x theo q là phức tạp, nhưng không quá hỗn loạn theo nghĩa mà chúng tôi xin giải thích dưới đây.

Ta lấy ví dụ, x là chi phí sản xuất.

Khi doanh nghiệp ở điều kiện bình thường C_0 thì sự phụ thuộc của x và q là $x_0(q)$. Nhưng khi điều kiện sản xuất xấu đi, rơi vào trạng thái C_1 nào đó thì sự phụ thuộc của x là $x_1(q)$. Hiển nhiên lúc đó $x_1(q) > x_0(q) \forall q > 0$.

Ngược lại, nếu điều kiện sản xuất tốt hơn (thí dụ máy móc ít hỏng hóc, tinh thần nhân công thoải mái...) doanh nghiệp ở trạng thái ta gọi là C_2 thì sự phụ thuộc của x vào q là $x_2(q)$. Khi đó ta lại có $x_2(q) < x_0(q)$.

Để tiện lợi, ta sẽ gọi những sự phụ thuộc có thể của x vào q là những quỹ đạo có thể của x . Như trong các phần trên ta sẽ có các quỹ đạo $x_0(q)$, $x_1(q)$, $x_2(q)$ tùy thuộc vào tình trạng C_0 , C_1 , C_2 của doanh nghiệp.

Tập hợp các quỹ đạo của đại lượng x , ta ký hiệu là $0(x)$.

Theo những phân tích ở ví dụ trên, ta có thể giả thiết các quỹ đạo của đại lượng x tính chất sau:

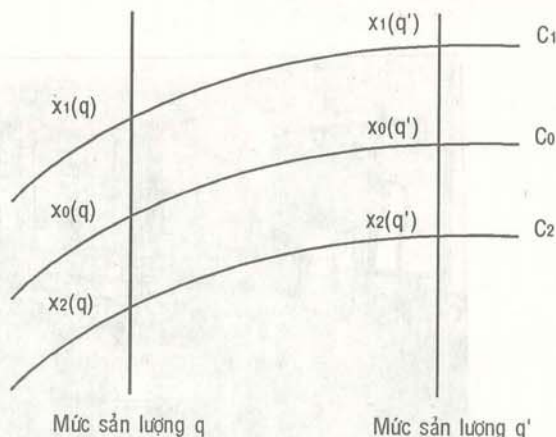
Tính chất 1: Nếu $x_1, x_2 \in 0(x)$ với $x_1 \neq x_2$

thì $[x_1(q) - x_2(q)] \cdot [x_1(q') - x_2(q')] > 0$

$\forall q, q' > 0$

Ý nghĩa kinh tế của tính chất 1:

Đồ thị 1: Ý nghĩa kinh tế của các quỹ đạo $C_i(x)$



II. TRƯỜNG HỢP $x(q)$ LÀ MỘT ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN RỜI RẠC CHO MỌI $q > 0$ (q: SÀN LƯỢNG)

Tính chất 2:

Nếu đại lượng ngẫu nhiên $x(q)$ có thể nhận những giá trị

$$x_1^q < x_2^q < \dots < x_{nq}^q \text{ với bảng phân bố xác suất}$$

$$P_1^q, P_2^q, \dots, P_{nq}^q \text{ thì suy ra}$$

$$nq = nq' = n$$

$$\text{với } P_1^i = P_1^i = P_i$$

$$\forall q, q' > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Lúc đó tất cả các quỹ đạo của x chỉ có thể là $x_i(q) =$

$$x_i^i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Sau đó hiển nhiên ta có thể định nghĩa các đại lượng biên tế và đại lượng trung bình của x theo các quỹ đạo của nó.

Định lý 1:

Nếu $x(q)$ là các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có tính chất 1 và tính chất 2 thì ta có:

$$a) Mmx(q) = mMx(q)$$

$$b) MAX(q) = AMx(q)$$

III. TRƯỜNG HỢP $x(q)$ LÀ MỘT ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC CHO MỌI $q > 0$ (q: SÀN LƯỢNG)

1. Từ định nghĩa quỹ đạo cho trường hợp $x(q)$ là các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc, ta thấy rằng nếu x là một quỹ đạo nào đó của x thì rõ ràng ta có:

$$P[x(q) < \bar{x}(q)] = \text{const} \quad \forall q > 0$$

Yêu cầu này, ta cũng gán cho trường hợp $x(q)$ là các đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

Trước hết, chúng ta chỉ hạn chế các đại lượng ngẫu nhiên liên tục $x(q)$ có hàm phân phối Φq có tính chất sau:

2. Tính chất 3:

$\Phi q(t)$ liên tục

Φq tăng thực sự trên khoảng $(t: 0 < \Phi q(t) < 1)$

cho mọi $s: 0 < s < 1$

Ta xác lập một quỹ đạo $x(s, \cdot)$ của x có tính chất sau:

$$\Phi q(x(s, q)) = s, \quad \forall q > 0$$

$$0(x) = \{x(s, \cdot) / s \in (0, 1)\}$$

và tất nhiên tương tự như trường hợp rời rạc, từ mỗi quỹ đạo $\bar{x} \in 0(s)$ ta có thể xác định được các đại lượng $mx(q)$ và $Ax(q)$

3. Ký hiệu:

Để định nghĩa các đại lượng ngẫu nhiên $mx(q)$ và $Ax(q)$ chúng ta sử dụng ký hiệu sau:

$$\forall V \subseteq R$$

$$S_V^M(q) = \{\bar{x} \in 0(x) : M\bar{x}(q) \in V\}$$

$$S_V^A(q) = \{\bar{x} \in 0(x) : A\bar{x}(q) \in V\}$$

4. Định lý 2:

Nếu $x(q)$ là các đại lượng ngẫu nhiên liên tục có tính chất 3 thì ta có:

$$Mmx(q) = mMx(q)$$

$$MAX(q) = AMx(q)$$

5. Xác định hàm mật độ của $mx(q)$ và $Ax(q)$

Định lý 3: Cho x có hàm mật độ là $(\varphi, \alpha, \sigma)$ ta có:

Nếu $m\sigma(q) = 0$ thì $mx(q)$ là một đại lượng xác định và $Mx(q) = m\alpha(q)$

Nếu $m\sigma(q) \neq 0$ thì $mx(q)$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ là:

$$f_q(t) = \frac{1}{|m\sigma(q)|} \varphi\left(\frac{t - m\alpha(q)}{m\sigma(q)}\right)$$

$Ax(q)$ luôn luôn là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ là:

$$g_q(t) = \frac{1}{|A\sigma(q)|} \varphi\left(\frac{t - A\alpha(q)}{A\sigma(q)}\right)$$

6. Xét độ lệch tiêu chuẩn của $mx(q)$ và $Ax(q)$ trong trường hợp x có hàm mật độ là $(\varphi, \alpha, \sigma)$

Định lý 4:

Nếu x có hàm mật độ là $(\varphi, \alpha, \sigma)$ thì ta có:

$$Smx(q) = |mSx(q)|$$

$$SAx(q) = ASx(q)$$

IV. NGHIỆM NGẪU NHIÊN

Ta tìm nghiệm ngẫu nhiên của 2 phương trình:

$$Ax(q) = mx(q) \quad (1)$$

$$mx(q) = P \text{ (với } P \text{ là đơn giá)} \quad (2)$$

Gọi q là nghiệm của (1) thì q có hàm mật độ là:

$$\frac{(x - q_0)^2}{2B^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |B|} e^{-\frac{(x - q_0)^2}{2B^2}}$$

$$\text{với } B = \frac{A\sigma(q_0) - m\sigma(q_0)}{(m\alpha)'(q_0)}$$

Gọi $\hat{q}$ là nghiệm của (2) thì $\hat{q}$ có hàm mật độ là:

$$\frac{(x - q_0)^2}{2C^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |C|} e^{-\frac{(x - q_0)^2}{2C^2}}$$

$$\text{với } C = \frac{-m\sigma(q_0)}{(m\alpha)'(q_0)}$$

