

ỨNG DỤNG CỦA QUÁ TRÌNH POISSON: QUÁ TRÌNH HỒI PHỤC CÓ CHI PHÍ

TS. NGUYỄN VĂN SĨ

Chúng ta biết rằng quá trình Poisson là một quá trình đếm số biến cố nào đó xuất hiện, mà các khoảng thời gian giữa hai lần xuất hiện biến cố liên tiếp là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối mũ. Trên thực tế có thể xảy ra trường hợp các khoảng thời gian đó là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng một phân phối xác suất tùy ý nào đó. Quá trình này có nhiều ứng dụng thực tiễn.

Gọi $(N(t), t \geq 0)$ là quá trình đếm số biến cố nào đó xuất hiện trong khoảng thời gian $(0, t]$ và gọi ξ_n là khoảng thời gian giữa lần xuất hiện biến cố thứ $n-1$ và lần xuất hiện biến cố thứ n ($n \geq 1$). Nếu dãy biến ngẫu nhiên $(\xi_n, n \geq 1)$ độc lập và cùng phân phối xác suất nào đó, thì $(N(t), t \geq 0)$ được gọi là quá trình hồi phục.

Ta nhận thấy rằng ξ_1 là khoảng thời gian từ thời điểm ban đầu cho đến khi biến cố thứ 1 xuất hiện hay là thời gian chờ biến cố thứ 1 xuất hiện. Gọi phân phối xác suất của ξ_1 là $F(t) = P(\xi_1 \leq t)$. Đây cũng là phân phối xác suất của (ξ_n) .

Mỗi khi một biến cố xuất hiện ta nói rằng một lần hồi phục đã được thực hiện. Dãy $(\xi_n, n \geq 1)$ gọi là dãy thời gian chờ hồi phục.

Bây giờ ta xét quá trình hồi phục có chi phí như sau:

Ta xét quá trình hồi phục $(N(t), t \geq 0)$ với dãy thời gian chờ hồi phục $(\xi_n, n \geq 1)$ có tính chất sau:

- Mỗi khi xảy ra một lần hồi phục quá trình cần một khoản chi phí nào đó.

- Gọi r_n là khoản chi phí của quá trình tại thời điểm xảy ra lần hồi phục thứ n .

- Giả sử $(r_n, n \geq 1)$ độc lập và cùng phân phối xác suất, đồng thời r_n phụ thuộc vào ξ_n .

Đặt $R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} r_n$ là tổng chi phí trong khoảng thời gian $(0, t]$.

Gọi $a = E\xi_1$, $b = Er_1$ (lần lượt là trung bình độ dài một chu kỳ, trung bình chi phí).

Nếu $a, b < \infty$ thì với xác suất 1 ta có: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{b}{a}$ (*)

Thật vậy: ta có: $\frac{R(t)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N(t)} r_n = \left[\frac{1}{N(t)} \cdot \sum_{n=1}^{N(t)} r_n \right] \cdot \frac{N(t)}{t}$

Theo luật mệnh số lớn thì với xác suất 1 ta có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{N(t)} \cdot \sum_{n=1}^{N(t)} r_n = b \quad (1)$$

Mặt khác, gọi $S_{N(t)}$, $S_{N(t)+1}$ là thời gian xảy ra lần hồi phục thứ $N(t)$ và $N(t) + 1$

Lúc đó, $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$

$$\text{Do đó, } \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \quad (2)$$

Khi $t \rightarrow \infty$ thì $N(t) \rightarrow \infty$, đồng thời ta có: $S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$,

theo luật mệnh số lớn với xác suất 1, ta có: $\lim_{N(t) \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = a$

$$\text{Hơn nữa, } \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)} + \xi_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)}}{N(t)} + \frac{\xi_{N(t)+1}}{N(t)} \left[1 + \frac{1}{N(t)} \right]$$

$$\text{nên: } \lim_{N(t) \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{N(t) \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)+1} = a$$

$$\text{từ (2) ta có: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = a \text{ hay } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{a} \quad (3)$$

$$\text{Vậy từ (1) và (3) ta có: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{b}{a}$$

Ta nhận xét rằng: một chu kỳ hồi phục được hoàn thành mỗi khi một lần hồi phục mới được thực hiện. Với kết quả (*) cho biết rằng: Trung bình chi phí trên một đơn vị thời gian của quá trình bằng tỷ số giữa trung bình chi phí trong một chu kỳ với trung bình độ dài một chu kỳ.

Một ứng dụng thực tiễn như sau: Mô hình phục vụ khách đi xe.

Gọi T_n là khoảng thời gian giữa người khách thứ $n-1$ và người khách thứ n đến một bến xe phục vụ khách đi về cùng một hướng.

Dãy $(T_n, n \geq 1)$ độc lập và cùng phân phối xác suất với trung bình $ET_n = a$

Nhà xe phục vụ theo nguyên tắc nếu có đủ N khách thì một xe sẽ khởi hành đưa N khách đó đi. Khi chưa đủ N khách thì các khách chờ sẽ được phục vụ miễn phí một vài sinh hoạt cá nhân nào đó, chi phí do nhà xe bỏ ra cho mỗi khách chờ trong mỗi đơn vị thời gian là c . Như thế ta được quá trình hồi phục có chi phí với $N(t), t \geq 0$ là số lượng xe khởi hành trong khoảng thời gian $(0, t]$. Một chu kỳ hồi phục được hoàn thành khi có một xe khởi hành.

Trung bình chi phí của nhà xe trong một chu kỳ là:

$$B = E[cT_1 + 2cT_2 + \dots + (N-1)cT_{N-1}] = \frac{N(N-1)}{2} \cdot c \cdot a$$

Trung bình độ dài một chu kỳ là: $a = E[T_1 + T_2 + \dots + T_N] = Na$

Do đó trung bình chi phí trên một đơn vị thời gian của nhà xe là: $\frac{b}{a} = \frac{N-1}{2} \cdot c$

Giả sử mỗi khi một xe khởi hành thì nhà xe còn phải chi phí một khoản xuất bến b (lệ phí bến, cầu đường, ...) khi đó trung bình chi phí trong một chu kỳ là: $\frac{N(N-1)}{2} \cdot ca + b$ và

$$\text{trung bình chi phí của nhà xe trên một đơn vị thời gian } \frac{N-1}{2} \cdot c + \frac{b}{Na}$$

Chẳng hạn: $a=1$, $c=2$, $b=100$ thì trung bình chi phí của nhà xe trên một đơn vị thời gian là: $N-1 + \frac{100}{N}$

Trung bình chi phí này thống nhất bằng 19 khi $N=10$. Như vậy, nếu sử dụng xe 12 chỗ ngồi sẽ hiệu quả nhất cho nhà xe trong trường hợp này.

Ta còn có thể sử dụng kết quả trên cho các trường hợp như:

Tính cường độ của số tiền khách hàng gửi vào ngân hàng, tính cường độ chi phí của người sử dụng xe máy v.v...■

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Duy Tiến, Phần 1, Xích Markov và ứng dụng, ĐH QG Hà Nội, 1999
- [2] Vũ Tiến Việt, Luận văn thạc sĩ, 2000.
- [3] H. M Taylor, S. Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling, 1984.